COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE SISTEMAS CON MÚLTIPLES EQUILIBRIOS

JOSÉ JESÚS TORRES ARIAS

UNIVERSIDAD EAFIT
Abierta al mundo

UNIVERSIDAD DE EAFIT
ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
MEDELLÍN
2014

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE SISTEMAS CON MÚLTIPLES EQUILIBRIOS

JOSÉ JESÚS TORRES ARIAS

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de
Magister en Matemáticas

Asesor:
Ph. D. ANTHONY UYI AFUWAPE

Co–Asesor:
Ph. D. JAIRO ELOY CASTELLANOS RAMOS

UNIVERSIDAD DE EAFIT
ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
MEDELLÍN

2014

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El principal desarrollo de la teoría de los sistema dinámico en el siglo XX fué la investigación de atractores. En las tres primeras décadas de ese siglo, la atención de los investigadores se concentró en los atractores que consisten en el punto estacionario único. Como resultado, fue creada la teoría de la estabilidad clásica. En las siguientes tres décadas de ese siglo la exploración de atractores que consisten en conjuntos fijos y ciclos límite llevó a la creación de la teoría clásica de las oscilaciones y en el último tercio, fueron investigado intensamente las órbitas homoclínicas, heteroclínicas y otros tipos atractores.

Por otro lado, en los años cincuenta y los años sesenta del siglo pasado se establecieron los métodos de dominio de la frecuencia en la investigación de los sistemas no lineales. Al principio se aplicaron y desarrollaron sólo dentro de los marcos de la teoría de la estabilidad absoluta para la investigación de la estabilidad global del punto fijo. El desarrollo de métodos de dominio de frecuencia fue esencialmente estimulada por la propiedad de invariancia de la función de transferencia y respuesta de frecuencia con respecto a las transformaciones lineales del espacio de fases.

En los años setenta y los años ochenta del siglo pasado se hizo evidente que la herramienta de los métodos de dominio de la frecuencia se puede aplicar con éxito para la investigación de la estabilidad de los conjuntos de estacionarias, para la solución de problemas de la existencia de los ciclos y órbitas homoclinica así como para la estimación de la dimensión de atractores.

Los fundamentos de los métodos de dominio de la frecuencia y de la teoría de la estabilidad absoluta se dan en los dos primeros capítulos. Tratamos de exponer los métodos de dominio de frecuencia en el espíritu de excelentes libros como el de A. Aizerman [2], F.R Gantmakher [37] y S. Levhetz [50].

En el capítulo 2 presentamos condiciones para la existencia de dicotomía de soluciones de un sistema tipo péndulo particular, de ecuaciones diferenciales de tercer orden no-lineal con múltiples equilibrios, utilizando el criterio de dominio de frecuencia. Damos un ejemplo.

En este capítulo consideraramos una ecuación de la forma:

$$\dddot{x} + \alpha\ddot{x} + g(x)\dot{x} + \varphi(x) = 0 \tag{1}$$

donde $\alpha > 0$, $g(x)$ es una función continua acotada en $\mathbb{R}$, $\varphi(x)$ es una función impar continuamente diferenciable periódica con período 2π in $\mathbb{R}$. Además, asumamos que si $\mathbb{R}$ es segmentado como una unión de Π_k donde

$$\Pi_k = \{x|[2k\pi, 2(k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}\}, \tag{2}$$

$\varphi(x)$ tiene dos ceros x_1, x_2, $(x_1 < x_2)$, en cada segmento $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$ con $\varphi'(x_1) > 0$ y $\varphi'(x_2) < 0$. Bajo ciertos supuestos probamos el resultado principal de este capítulo:

La ecuación (1) es acotada estable y tiene una solución periódica no-trivial en cada segmento

$$\Pi_k = \{[2k\pi, 2(k+1)\pi) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Además, si $\alpha \geq 1$, y $\varphi'(\bar{x}) \neq 0$ en cualquier cero $\bar{x}$ of $\varphi(x)$, y $|\varphi'(\bar{x})| < \mu$ para algún $\mu > 0$, for all $x \in I\!R$, entonces la ecuación (1) es dicotómica. Estos resultados fueron publicados en [10].

En el capítulo 3, damos una forma generalizada del lema KYP del método dominio de frecuencia para sistemas disipativos uniforme. También incluimos principio de dualidad que nos permite discutir sistemas. Nosotros aplicamos estos resultados a ecuaciones no lineales de segundo orden de Rayleigh y Liénard. Esto resultados fueron presentados en ”IV Congreso de formación y modelación en Ciencias Básicas” Universidad de Medellín y publicados por Afuwape-Castellanos-Torres (ver [11]) como resultado de este trabajo.

CAPÍTULO 1

PRERREQUISITOS

1.1 Teoría Clásica de Estabilidad Absoluta

1.1.1 Ecuación de Control de retroalimentación y sus función de transferencia

Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = Px + q\varphi(t, r^*x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

donde P, q, r son matrices reales constantes de orden $n \times n$, $n \times m$ y $n \times l$ respectivamente y $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ es continua y localmente Lipschitz continua en el segundo argumento. Tal ecuación en la teoría de sistemas es llamada *ecuación de control de retroalimentación*. Esta se puede considerar como una interconexión de una unidad lineal [bloque] (1.2) (con la entrada ξ y de salida (-σ)) y un bloque no lineal (1.3):

$$\dot{x} = Px + q\xi, \quad \sigma = r^*x, \tag{1.2}$$

$$\xi = \varphi(t, \sigma). \tag{1.3}$$

Llamamos al $n-$ vector x el *estado del sistema no lineal.*

La característica universal de la parte lineal es su *función de transferencia* a partir de la entrada ξ a la salida $(-\sigma)$

$$\chi(p) = r^*(P - pI_n)^{-1}q \tag{1.4}$$

donde $p = \tau + i\omega$. Tenga en cuenta que la definición de χ es de coordenadas libre, es decir, después de cualquier cambio de coordenadas $y = Sx$ en (1.1) (S es una matriz no–singular $n \times n$) χ sigue siendo la misma función. Observe también que $\chi(p)$ se puede recuperar a través de la transformada de Laplace con parámetro complejo p. En efecto, si asumimos que $x(0) = 0$ y tomamos transformada de laplace formal a ambos lados de la ecuación (1.2) recibimos para la transformada de Laplace $\widehat{\sigma}$ y $\widehat{\xi}$ de las funciones σ y χ respectivamente la relación

$$\widehat{\sigma}(p) = -\chi(p)\widehat{\xi}(p).$$

La función $\omega \mapsto \chi(i\omega)$ $(\omega \in \mathbb{R})$ es la *respuesta de la frecuencia* de (1.2).

Los teoremas de estabilidad para la ecuación de control de retroalimentación se formulan a menudo en términos de la respuesta de la frecuencia de su parte lineal. Tales teoremas se llaman teoremas dominio de la frecuencia o criterios de dominio de frecuencia. En este capítulo se presenta la herramienta que le da la oportunidad de obtener criterios de estabilidad de dominio de frecuencia.

1.1.2 Controlabilidad, Observabilidad y Principio de Dualidad de Kalman

Las nociones de controlabilidad y observabilidad son consideradas en detalle en los libros [Voronov 1979 [74], Kalman et al. 1971 [49], Gelig et al. 1978 [38], Popov 1966 [68]].

Considere el bloque lineal estacionario

$$\dot{x} = Px + q\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.5}$$

$$\sigma = r^* x. \tag{1.6}$$

Aquí las matrices constantes P, q, r (de orden $n \times n$, $n \times m$ y $n \times l$ respectivamente) pueden ser real y complejas. La entrada $\xi = \xi(t)$ del bloque lineal se supone continuo.

Definición 1.1. El bloque lineal (1.5), (1.6) (resp. la pareja (P, q)) es llamada controlable si para cualquier momento fijo $t_1 < t_2$ y cualquier $x', x'' \in \mathbb{R}^n$ fijos existe una entrada $\xi(t)$ la cual transfiere $x(t_1) = x'$ en $x(t_2) = x''$.

En otras palabras, el bloque lineal es controlable si por medio de la entrada apropiada se puede transferir de cualquier estado en cualquier otro estado en un período de tiempo dado.

Existen varias afirmaciones equivalentes acerca de la controlabilidad, aquí mencionamos tres de ellas. Sea

$$Q(p) = \delta(p)(pI_n - P)^{-1}q = Q_1 p^{n-1} + \cdots + Q_{n-1}p + Q_n,$$

donde $\delta(p) = \det(pI_n - P)$ y $Q_k (k = 1, \ldots, n)$ son matrices $n \times m$.

Teorema 1.2. ([56]) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes y cada una de ellas es equivalente a la controlabilidad del bloque lineal:*

1. *Si S es una matriz $n \times n$ no singular entonces las matrices $\widehat{P} = S^{-1}PS$ y $\widehat{q} = S^{-1}q$ no podría ser de la forma*

$$\widehat{P} = \begin{Vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{Vmatrix}, \quad \widehat{q} = \begin{Vmatrix} q_1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

con P_{11} siendo una matriz $k \times k$ $(0 \leq k < n)$ y q_1 siendo una matriz $k \times m$.

2. *La matriz $n \times mn$ $||q, Pq, \ldots, P^{n-1}q||$ tiene rango n.*

3. *La matriz $n \times mn$ $||Q_1, Q_2, \ldots, Q_n||$ tiene rango n.*

Definición 1.3. El bloque lineal (1.5), (1.6) (resp. la pareja (P, r)) es llamada observable si para cualquier $t_1 < T_2$ y cualquiera $(x'(t), \xi'(t), \sigma'(t))$, $(x''(t), \xi''(t), \sigma''(t))$ definidas sobre $[t_1, t_2]$ y satisfaciendo (1.5), (1.6) las relaciones $\xi' \equiv xi''$, $\sigma'(t) \equiv \sigma''(t)$ $(t \in [t_1, t_2]$ implica la igualdad $x'(t) \equiv x''(t)$ $(t \in [t_1, t_2])$.

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad, están conectadas estrechamente entre sí por medio del teorema de dualidad de Kalman.

Teorema 1.4. (Principio de dualidad de Kalman) *La pareja (P, r) es observable si y solo si la pareja (P^*, r) es controlable.*

El principio de la dualidad da la oportunidad de reformular el Teorema (1.2) para dar condiciones necesarias y suficientes de observabilidad. Necesitamos hacer las designaciones

$$\delta'(p) = \det(pI_n - P^*),$$
$$Q'(p) = \delta'(p)(pI_n - P^*)^{-1}r = Q'_1 p^{n-1} + \cdots + Q'_{n-1}p + Q'_n$$

donde Q'_j $(j = 1, \ldots, n)$ son $n \times l$ matrices.

Teorema 1.5. ([56]) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes y cada una de ellas es equivalente a la observabilidad del los bloques lineales* (1.5)*,* (1.6)*.*

1. Si S es una matriz no singular $n \times n$ entonces las matrices $\widehat{P} = S^{-1}PS$ y $\widehat{r} = S^*r$ no podrían ser de la forma

$$\widehat{P} = \begin{Vmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{12} & P_{22} \end{Vmatrix}, \quad \widehat{r} = \begin{Vmatrix} r_1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

con P_{11} siendo una matriz $k \times k$ $(0 \leq k < n)$ y r_1 siendo una matriz $k \times l$.

2. *La matriz* $n \times nl$ $||q, P^*r, \ldots, (P^*)^{n-1}r||$ *tiene rango* n*.*

3. *La matriz* $n \times nl$ $||Q_1, Q_2', \ldots, Q_n'||$ *tiene rango* n*.*

1.1.3 Función de transferencia de controbabilidad y bloque lineal observable

Considere el bloque lineal (1.5), (1.6) con matrices de entradas P, q, r escalares y salida escalar, es decir, $m = l = 1$. En este caso la función de transferencia de la entrada ξ a la salida $(-\sigma)$ tiene la forma

$$\chi(p) = r^*(P - pI_n)^{-1}q = \frac{\alpha(p)}{\delta(p)}, \tag{1.7}$$

donde $\delta(p) = \det(pI - P)$ y el grado de $\alpha(p)$ es menor que n.

Definición 1.6. La función de transferencia (1.7) es llamada no degenerada si α y δ son polinomios coprimos.

Teorema 1.7. **([56])** *En el caso escalar de* $m = l = 1$ *el bloque lineal* (1.5), (1.6) *es observable y controlable si y solo si su función de transferencia es no degenerada.*

1.1.4 Bloques Lineales estables

Vamos a considerar el bloque lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = Px + q\xi \\ \sigma = r^*x \end{cases} \tag{1.8}$$

con P matriz $n \times n$, q matriz $n \times p$ y r matriz $n \times l$. Daremos aquí el tratamiento de bloque estable siguiendo el libro de [Voronov 1979][74].

Definición 1.8. Un bloque estacionario (1.8) es llamado estable si todos los valores propios de la matriz P tienen parte real negativa, i.e. si la matriz P es Herwitziana.

Usaremos la notación

$$|T| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^2}$$

para una matriz $T = \{t_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$.

Teorema 1.9. *Si* $\xi \equiv 0$ *y el bloque* (1.8) *es estable entonces existen números positivos* χ_0, M_1, M_2 *tal que*

$$|x(t)| \leq M_1 e^{-\chi_0 t}\, |x_0|\,, \tag{1.9}$$

$$|\sigma(t)| \leq M_2 e^{-\chi_0 t} |x_0|, \tag{1.10}$$

donde $x_0 = x(0)$ *es el estado inicial del bloque.*

Demostración. La solución del problema de cauchy

$$\dot{x} = Px, \quad x(0) = x_0$$

tiene la forma

$$x(t) = e^{Pt} x_0.$$

Entonces

$$|x(t)| \leq e^{Pt} |x_0|, \quad |\sigma(t)| \leq |r| \left| e^{Pt} \right| |x_0|. \tag{1.11}$$

Sean λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ los valores propios de P y

$$\chi = \max_{i=1,\ldots,n} \{Re\, \lambda_i\}.$$

En nuestro caso $\chi < 0$. De acuerdo a la estimativas [Gantmakher 1988[37], Demidovich 1967[35]]

$$\left| e^{Pt} \right| \leq M_0(\varepsilon) e^{(\chi+\varepsilon)t}$$

donde ε es un número arbitrario positivo. Así podemos fijar un cierto valor de ε y obtenemos

$$\left| e^{Pt} \right| \leq M_0 e^{(\chi_0 t} \quad (\chi_0 > 0), \tag{1.12}$$

donde $\chi_0 < -\chi$. Por lo tanto teniendo en cuenta (1.11) tenemos (1.9) y (1.10). □

Teorema 1.10. *Si el bloque* (1.8) *es estable y la norma de* $\xi(t)$ *es acotada para todo* $t > 0$ *entonces la norma de* $\sigma(t)$ *es acotada para todo* $t > 0$ *también.*

Demostración. Supongamos que $|\xi(t)| < \beta$ para todo $t > 0$. Vamos a usar para (1.8) la forma de Cauchy

$$\sigma(t) = r^* e^{Pt} x_0 + \int_0^t r^* e^{P(t-\tau)} q \xi(\tau) d\tau.$$

Por lo tanto

$$|\sigma(t)| \leq \left| e^{Pt} \right| |r| |x_0| + \int_0^t |r| \left| e^{P(t-\tau)} \right| |q| \, \beta \, d\tau.$$

Así

$$|\sigma(t)| \leq \sigma_1 + \sigma_2 \int_0^t e^{-\chi_0(t-\tau)} \, d\tau.$$

o

$$|\sigma(t)| \leq \delta_3$$

donde δ_i $(i = 1, 2, 3)$ son constantes. □

Teorema 1.11. *Supongamos que el bloque* (1.8) *es estable. Sean* $\sigma_1(t)$ *y* $\sigma_2(t)$ *salidas correspondientes a la misma entrada* $\xi(t)$ *pero con diferentes estados iniciales,* x_{01} *y* x_{02} *respectivamente. Entonces se verifica*

$$|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)| \leq M_3 e^{-\chi_0 t} \quad (M_3 > 0,\ \chi_0 > 0). \tag{1.13}$$

Demostración. Cada estado inicial X_{0i} $(i = 1, 2)$ genera el estado $x_i(t)$. Las correspondientes salidas $\sigma_i(t)$ $(i = 1, 2)$ puede ser representadas en la forma de Cauchy como

$$\sigma_1(t) - \sigma_2(t) = r^* e^{Pt}(x_{01} - x_{02}).$$

Con la ayuda de (1.12) obtenemos (1.13). Así hemos probado que diferentes salidas de los bloques lineales correspondiente a la misma entrada son asintóticamente indistinguibles. □

De acuerdo a la definición (1.8) el bloque lineal es estable si y solo si el polinomio característico de la matriz P es Hurwitziano.

Vamos a dar dos teoremas acerca de la propiedad Hurwitziana de un polinomio. Considere el polinomio

$$Q(p) = a_0 p^n + \cdots + a_n$$

con coeficientes reales a_k $(k = 0, \ldots, n)$ y $a_0 > 0$. Primero damos una condición necesaria para esta propiedad.

Teorema 1.12. *Si el polinomio* $Q(p)$ *es Hurwitziano entonces todos sus coeficientes son positivos.*

Demostración. Sea $p_k = -\tau_k \pm i\omega_k$ $(k = 1, \ldots, r;\ t_k > 0)$ y $p_j = -\gamma_j$ $(\gamma_j > 0;\ j = 1, \ldots, s)$ raíces de $Q(p)$. Entonces

$$\begin{aligned} Q(p) &= a_0 \prod_{k=1}^{r} (p + \tau_k - i\omega_k)^{m_k} \cdot (p + \tau_k + i\omega_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{s} (p + \gamma_j)^{n_j} \\ &= a_0 \prod_{k=1}^{r} (p^2 + 2\tau_k p + \tau_k^2 + \omega_k^2)^{m_k} \cdot \prod_{j=1}^{s} (p + \gamma_j)^{n_j} \end{aligned}$$

donde m_k $(k = 1, \ldots, r)$, n_j $(j = 1, \ldots, s)$ son las multiplicidades de las correspondientes raíces. □

Observación 1.1.1. *Para el polinomio* $Q(p)$ *con* $n = 2$ *la hipótesis del teorema es la condición suficiente para ser Hurwitziano. Si* $n > 2$ *esto no es así.*

Vamos ahora introducir la matriz

$$A(p) = \begin{Vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2n-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{2n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{Vmatrix}$$

la cual es llamada matriz Hurwitz de $Q(p)$.

Teorema 1.13. (Criterio Routh–Hurwitz) *El polinomio $Q(p)$ es Hurwitziano si y solo si todos los menores diagonal principal de la matriz Hurwitz $A(p)$ son positivos:*

$$a_1 > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad \det A(p) > 0.$$

Ejemplo 1.14. Sea $Q(p) = p^3 + \alpha p^2 + \beta p + \gamma$. Entonces

$$A(p) = \begin{Vmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \end{Vmatrix}.$$

Consecuentemente, las condiciones suficientes y necesarias para que $Q(p)$ sea Hurwitziano son $\alpha > 0$, $\alpha\beta > \gamma$, $\gamma(\alpha\beta - \gamma) > 0$ o $\alpha > 0$, $0 < \gamma < \alpha\beta$.

Definición 1.15. El bloque lineal (1.5),(1.6) (respectivamente, la pareja (P, q)) es llamada estabilizable si existe una matriz $n \times n$ S tal que $P + qS^*$ es Hurwitziano.

Teorema 1.16. ([56]) *El par (P, q) contralable es estabilizable.*

Lema 1.17. (Lema Schur) *Sean A, B, C y D matrices $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ y $m \times m$ respectivamente. Si* $\det A \neq 0$ *entonces*

$$\det \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B). \tag{1.14}$$

Si $\det D \neq 0$ *entonces*

$$\det \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} = \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C). \tag{1.15}$$

Sean P y q matrices complejas de orden $n \times n$ y $n \times m$ respectivamente y

$$\mathcal{G}(x, \xi) = x^* G x + 2\mathrm{Re}\ (x^* D \xi) + \xi^* \Gamma \xi)$$

siendo una forma Hermitiana de $x \in \mathbb{C}^n$ y $\xi \in \mathbb{C}^m$, las matrices complejas $G = G^*$, $\Gamma = \Gamma^*$ y D teniendo los ordenes $n \times n$, $m \times m$ y $n \times m$ respectivamente.

Teorema 1.18. (Yakubovich–Kalman) *Suponga que la pareja (P, q) es controlable. Entonces Existe una matriz $H = H^*$ satisfaciendo la desigualdad*

$$2\mathrm{Re}\ [x^* H (Px + q\xi)] + \mathcal{G}(x, \xi) \leq 0 \quad (x \in \mathbb{C},\ \xi \in \mathbb{C}^m) \tag{1.16}$$

si y solo si

$$\mathcal{G}[(i\omega I_n - P)^{-1} q\xi, \xi] \leq 0 \tag{1.17}$$

para todo $\xi \in \mathbb{C}^m$ y todo $\omega \in \mathbb{R}$ con $\det(P - i\omega I_n) \neq 0$. En caso que las matrices P y q y los coeficientes de $\mathcal{G}$ sean reales la matriz H también lo es. Si la matriz P y q es Hurwitziana, $G \leq 0$ y la pareja (P, D) es observable entonces cualquier matriz H satisfaciendo (1.16) es definida positiva.

Lema 1.19. (Referente a la solubilidad de la ecuación de Lyapunov) *Sea P una matriz Hurwitziana $n \times n$ compleja. La ecuación*

$$P^* H + PH = G \tag{1.18}$$

tiene una única solución $H = H^*$ hermitiana para cualquier matriz G $n \times n$ compleja. Si $G = G^* \leq 0$ entonces $H = H^* \geq 0$ y $Hy_0 = 0$ implica $HPy_0 = 0$.

Teorema 1.20. (Referente a la solubilidad de la desigualdad matricial Lyapunov estricta) (Gelig et al. 1978)[38] *Suponga que la pareja (P, q) es estable, rango $q = m$ y $\det(P - i\omega I_n) \neq 0$ $(\omega \in \mathbb{R})$. Entonces existe una matriz $H = H^*$ (la cual es real si P, q y r son real) satisfaciendo las relaciones*

$$HP + P^* H < 0 \quad y \quad Hq + r = 0 \tag{1.19}$$

si y solo si

$$\mathrm{Re}\ r^*(P - i\omega I_n)^{-1} q > 0 \quad para\ todo \quad \omega \in \mathbb{R} \tag{1.20}$$

y

$$\lim_{\omega \to +\infty} \omega^2 \mathrm{Re}\ r^*(P - i\omega I_n)^{-1} q > 0. \tag{1.21}$$

Teorema 1.21. (Criterio Círculo) *Suponga que la pareja (P, q) es controlable y las hipótesis siguientes son válidas:*

(i) *La matriz P no tiene valores propios con parte real cero;*

(ii) *Para un cierto $\mu_0 \in [\mu_1, \mu_2]$ el sistema lineal*

$$\begin{cases} \dot{x} = Px + q\xi, \quad \sigma = r^* x \\ \xi = \mu_0 \sigma, \quad \mu_0 \in [\mu_1, \mu_2] \end{cases}$$

es asintoticamente estable;

(iii) *Se cumple la desigualdad dominio de frecuencia*

$$\mathrm{Re}\,\{[\mu_1 \chi(i\omega) + 1]^* [\mu_2 \chi(i\omega) + 1]\} > 0 \quad \textit{para todo} \quad \omega \in \mathbb{R}^1.$$

Entonces el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Px + q\xi, \quad \sigma = r^* x \quad (x \in \mathbb{R}^n) \\ \xi = \varphi(t, \sigma) \end{cases}$$

es absolutamente estable con respecto a $M[\mu_1, \mu_2]$.

Este teorema se cita en muchos artículos y libros dedicados a la teoría de control automático. Indicamos aquí los más conocidos de ellos Brockett 1970 [26], Gelig et al. 1978 [38], Voronov 1981 [75].

Teorema 1.22. (Aizerman & Gantmakher 1964) [2] *Suponga $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es acotada y uniformemente continua sobre $[0, +\infty)$. Suponga $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua sobre $\mathbb{R}$ y positiva sobre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Suponga que $G(f(t)) \in L^1[0, +\infty)$. Entonces $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.*

Lema 1.23. (Barbalat, ver [Popov 1966][68]) *Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua y $L^2[0, +\infty)$ entonces*

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0.$$

1.2 Definiciones Básicas. Dicotomía. Sistemas con equilibrio finito

1.2.1 Propiedades asintóticas globales de Sistemas diferenciales

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n). \tag{1.22}$$

donde $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz continua en el segundo argumento. Para $t_0 \geq 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ denotamos por $x(t, t_0, x_0)$ la solución de (1.22) teniendo $x(t, t_0, x_0) = x_0$. Note que la hipótesis sobre f garantiza que existe una única solución de (1.22) para cualquier condición inicial dentro de la región considerada.

La hipótesis sobre f garantiza también que las soluciones de (1.22) son continuas con respecto a las condiciones iniciales. Esto significa que para una solución dada $x(t, t_0, x_0)$ $(t \in [t_0, \theta))$ y ϵ arbitrario, $t_1 \geq t_0$ y $T \geq 0$ $(t_1 + T < \theta)$ existe $\delta = \delta(\epsilon, t_1, T)$ tal que $|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_2, x_1)| < \epsilon$. Así, si dos soluciones de (1.22) empiezan en puntos cercanos permanecen cercanas en un intervalo de tiempo determinado. Vamos a suponer que cada solución $x(t, t_0, x_0)$ de (1.22) puede ser continuada en $[t_0, +\infty)$

Definición 1.24. La solución $x(t) \equiv c$ donde $c \in \mathbb{R}^n$ y $f(t, c) = 0$ para todo $t \geq t_0$, es llamada una solución estacionaria o un punto de equilibrio.

Los resultados de la teoría de la estabilidad clásica son utilizados para sistemas de control con equilibrio único. Pero a menudo tenemos que lidiar con sistemas con equilibrio múltiple, conjuntos de equilibrio de este tipo son muy diversos. El conjunto de equilibrio puede ser finito o infinito, y en un caso extremo puede ser contable o tener la potencia del continuo. Cada tipo de conjunto de equilibrio corresponde a un cierto tipo de función no lineal. De esta forma aparecen nuevos tipos de problemas de estabilidad.

Estos problemas no pueden ser investigados por medio de las herramientas clásicas de Lyapunov o Popov. Así surge la necesidad de desarrollar la teoría clásica de tal forma que sea posible usarse para investigar la estabilidad de sistemas con equilibrio múltiple.

El primer paso es elaborar nociones que describen el cuadro global del comportamiento de soluciones con respecto a todo el conjunto de equilibrio. Existen varias propiedades globales de las soluciones del sistema no lineal (1.22).

Una propiedad básica global es el acotamiento de soluciones de (1.22) en $[t_0, +\infty)$. Recordamos que un solución $x(t, t_0, x_0)$ es acotada si existe un $m > 0$ tal que $|x(t, t_0, x_0)| \leq m$ para todo $t \geq t_0$ donde m puede depender de x_0.

Definición 1.25. Si todas las soluciones de (1.22) son acotadas decimos que la ecuación es Lagrange estable.

Otra importante propiedad la cual caracteriza el comportamiento de soluciones para $t \to +\infty$ es la propiedad de convergencia.

Definición 1.26 (Hirsch 1988)**.** Una solución $x(t)$ de (1.22) se dice es convergente si $x(t) \to c$ cuando $t \to +\infty$ donde c es un punto de equilibrio de (1.22). Decimos que la solución $x(t)$ es casi convergente si $dist(x(t), \Lambda) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ donde Λ es el conjunto de puntos de equilibrio de (1.22) y $dist(x, \Lambda)$ denota la distancia desde un punto x al conjunto Λ, es decir, $dist(x, \Lambda) = \text{ínf}_{x\in\Lambda} |x - z|$.

Definición 1.27 (Hale 1987)**.** La ecuación (1.22) es llamada tipo gradiente si todas sus soluciones son convergentes. Esta es llamada casi tipo gradiente si todas sus soluciones son casi convergentes.

Definición 1.28 (Kalman 1957)**.** La ecuación (1.22) se dice dicotómica (o mono estable) si todas sus soluciones acotadas son convergentes. Esta es llamada casi dicotómica (casi mono estable) si toda solución acotada es casi convergente.

Definición 1.29. El conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es llamado invariante para el sistema (1.29) si $x_0 \in M$ implica que $x(t, t_0, x_0) \in M$ para $t \in \mathbb{R}$. Si $x_0 \in M$ implica que $x(t, t_0, x_0) \in M$ para $t \geq t_0$ entonces M es llamado invariante positivo.

Definición 1.30. El conjunto $K \in \mathbb{R}^n$ es llamado un atractor para el sistema (1.22) si este es invariante y existe un dominio $D \supset \overline{K}$, tal que para cualquier $x_0 \in D$ se cumple que $dist(x(t, t_0, x_0), K) \to 0$ cuando $t \to +\infty$.
Si $D = \mathbb{R}^n$ entonces K es llamado un atractor global.

Observación 1.2.1. *Para un sistema tipo gradiente su conjunto de equilibrio es su atractor global*

En este sección estableceremos el criterio de dominio frecuencia de estabilidad de Lagrange, dicotomía y comportamiento tipo gradiente para caracterizar sistemas de control, así como el criterio de localización de atractores. Se darán métodos y procedimientos los cuales ampliaran las ideas clásicas de Lyapunov y harán posible investigar el comportamiento global de soluciones para sistemas con múltiples equilibrio.

Consideremos el caso autónomo de la ecuación (1.22)

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde f satisface las condiciones del sistema (1.22) con respecto a x. Denotamos por $x(t, x_0)$ la solución de esta ecuación con $x(0, x_0) = x_0$ y asuma que cualquier solución es definida en $\mathbb{R}$. Ahora introduciremos la noción de punto ω–límite para este sistema junto con la noción de punto de equilibrio.

Definición 1.31. Un punto $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es llamado punto ω–límite de la solución $x(t, x_0)$ si existe una sucesión creciente $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$, tal que $x(t_n, x_0) \to \hat{x}$ cuando $n \to +\infty$. El conjunto de todos los puntos ω–límites es llamado conjunto ω–límite y es denotado por $\Omega(x_0)$.

Es bien conocido que para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$ el conjunto $\Omega(x_0)$ es cerrado y invariante positivo [Hartman 1964][43].

Vamos a considerar varias situaciones cuando el sistema de control autónomo

$$\dot{x} = Px + q\varphi(\sigma), \ \sigma = r^* x \ (x \in \mathbb{R}^n, \ \sigma \in \mathbb{R}) \tag{1.23}$$

con P una matriz $n \times n$, r y q $n-$ vectores, pueden tener equilibrio múltiple. Consideremos el sistema con pares controlables (P, q) y par observable (P, r), así que la función de transferencia $\chi(p) = c^*(A - pl)^{-1}b$ es no degenerada.

Asumamos que la función $\varphi(\sigma)$ es continua para todo $\sigma \in \mathbb{R}$. Suponga que $x(t) \equiv x_{eq}$ es un equilibrio de (1.23). Entonces,

$$\sigma_{eq} = r^* x_{eq} \quad \text{y} \quad Px_{eq} = -q\varphi(\sigma_{eq}).$$

Podemos distinguir dos casos.

I). Sea $detP \neq 0$. Entonces es fácil establecer que

$$\sigma_{eq} = -\chi(0)\varphi(\sigma_{eq}). \tag{1.24}$$

Es claro que σ_{eq} es necesariamente un punto de intersección de la curva $\varphi = \varphi(\sigma)$ y la línea recta $\sigma = -\chi(0)\varphi$. Puede ocurrir que: Las dos líneas pueden ser un punto simple de intersección $\sigma_{eq} = 0$ (ver figura 1.1-a) o varios puntos de intersección (ver figura 1.1-b). El conjunto de puntos de intersección puede ser un conjunto numerable (ver figura 1.1-c) o un intervalo (ver figura 1.1-d). Note que el caso de $detP \neq 0$ puede ser fácilmente reducido al caso de $detP = 0$. En efecto, suponga que[1] $\chi(0) \neq 0$ y reemplace la función no lineal $\varphi(\sigma)$ por la función no lineal

$$\hat{\varphi}(\sigma) = \varphi(\sigma) - \frac{\sigma}{\chi(0)}. \tag{1.25}$$

Entonces el sistema (1.23) puede ser transformado a la forma

$$\dot{x} = \hat{P}x + q\hat{\varphi}(\sigma), \quad \sigma = r^* x, \tag{1.26}$$

[1] El caso $\chi(0) = 0$ no es de interés porque en este caso el único equilibrio está garantizado.

donde $\hat{P} = P - qr^*/\chi(0)$.

Puesto que

$$\hat{P}(P^{-1}q) = P(P^{-1}q) - \frac{qr^*(P^{-1}q)}{r^*P^{-1}q} = 0$$

podemos afirmar que $\hat{P}$ tiene un valor propio cero el cual corresponde al vector propio $P^{-1}q$

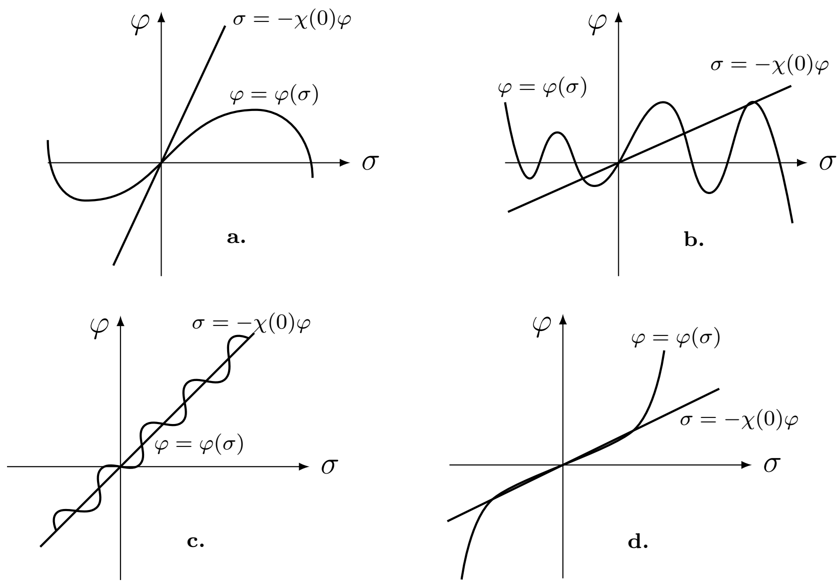

Figura 1.1: Varias posibilidades de intersección de las líneas $\sigma = -\chi(0)\varphi$ y $\varphi = \varphi(\sigma)$.

II). $detP = 0$. Sea σ_0 una raíz de $\varphi(\sigma)$. Es claro que siempre existe un vector propio x_0 de P correspondiente al valor propio cero tal que $r^*x_0 = \sigma_0$. Así cualquier raíz de $\varphi(\sigma)$ genera un punto de equilibrio. El caso cuando una raíz genera un solo equilibrio orresponde al item anterior. En caso contrario a esta situación la descripción del conjunto de equilibrio no se agota. Note por ejemplo que pueden existir varios vectores linealmente independientes x_0 correspondientes al mismo σ_0.

Hemos establecido que el caso de $\det P = 0$ es mas general que el caso de $detP \neq 0$. Es por ello que vamos a suponer que para $\varphi(\sigma)$ continua, $detP = 0$.

Cualquier sistema (1.23) con $detP = 0$ puede reescribirse en la forma

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Az + b\varphi(\sigma), \\ \frac{d\sigma}{dt} &= c^*z + \rho\varphi(\sigma) \end{aligned} \tag{1.27}$$

donde A es una $(n-1)\times(n-1)$ matriz, b y c son $(n-1)$ vectores y ρ es un número.

En efecto, por medio de una transformación lineal no singular uno puede reducir (1.23) al sistema

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= Az + b\varphi(\sigma), \quad \sigma = g^*z + \gamma\eta,\\ \frac{d\eta}{dt} &= a^*z + \beta\varphi(\sigma)\end{aligned}$$

donde A es una $(n-1)\times(n-1)$ matriz; a, b y g son $(n-1)$ vectores; β y γ son números. Como (P,r) es observable, se tiene que $\gamma \neq 0$. Se sigue que por un transformación lineal no singular el sistema (1.23) se puede reducir a (1.27) con $c = A^*g + \gamma a$, $\rho = g^*b + \beta\gamma$

El sistema (1.27) se caracteriza por ser una función transferencia de su parte lineal de la entrada φ a la salida $(-d[\sigma]/dt)$:

$$K(p) = c^*(A - pl)^{-1}b - \rho \quad (p \in \mathbb{C}).$$

Como (P,q) es controlable y (P,r) es observable, tenemos, de acuerdo al Teorema (1.7) que $\chi(p) = r^*(P-pl)^{-1}q$ es no degenerado. Es fácil mostrar que $K(p) = p\chi(p)$ o $\chi(p) = K(p)/p$. Entonces, $K(p)$ es también no degenerate y la función $c^*(A-pl)^{-1}b$ es no degenerate también. Entonces de acuerdo al Teorema (1.7) el par (A,b) es controlable y el par (A,c) es observable.

Suponga ahora que (z_{eq}, σ_{eq}) es un punto de equilibrio de (1.27). Entonces

$$Az_{eq} = -b\varphi(\sigma_{eq}), \quad c^*z_{eq} = -\rho\varphi(\sigma_{eq}). \tag{1.28}$$

Multiplicando ambos lados de la primera ecuación a su vez por c^*, c^*A, $\ldots$, c^*A^{n-2}, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} c^*z_{eq} &= -\rho\varphi(\sigma_{eq}),\\ c^*Az_{eq} &= -\rho b\varphi(\sigma_{eq}),\\ c^*A^2z_{eq} &= -\rho Ab\varphi(\sigma_{eq}),\\ &\cdots\cdots\\ c^*A^{n-1}z_{eq} &= -\rho A^{n-2}b\varphi(\sigma_{eq}),\end{aligned}$$

con la matriz $||c^*, c^*A, \ldots, c^*A^{n-1}||$. Puesto que (A,c) es observable, su rango es igual a n (de acuerdo al teorema 1.2.3). Se sigue que este sistema tiene una solución única z_{eq} para todo valor de φ_{eq}.

Si el $detA \neq 0$ tenemos

$$K(0)\varphi(\sigma_{eq}) = 0$$

Pero $K(0) \neq 0$. Realmente, en el caso $K(0) = 0$ la función racional $\chi(p)$ puede ser cancelada por p, lo cual de acuerdo al Teorema (1.7) contradice o la observabilidad de (P, r) o controlabilidad de (P, q). Así necesariamente tenemos que σ_{eq} es una raíz de $\varphi(\sigma)$ y $z_{eq} = 0$.

Si el $detA = 0$ no podemos excluir la posibilidad de σ_{eq} sea algo más que una raíz de $\varphi(\sigma)$.

1.2.2 Criterio Dominio Frecuencia de Dicotomía

Consideremos el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Az + b\varphi(\sigma), \\ \frac{d\sigma}{dt} &= c^* z + \rho\varphi(\sigma). \end{aligned} \qquad (z \in \mathbb{R}^n, \ \sigma \in \mathbb{R}) \tag{1.29}$$

Aquí A es una $n \times n$ matriz, b y c son n vectores y ρ es un número. Supongamos que la función no lineal $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable por tramos en $\mathbb{R}$. Supongamos también que para todo $\sigma \in \mathbb{R}$ donde $\varphi'(\sigma)$ existe se cumple la desigualdad

$$-\infty < \mu_1 \leq \frac{d\varphi}{d\sigma} \leq \mu_2 < +\infty. \tag{1.30}$$

Caracterizamos el sistema (1.29) por la función de transferencia de su parte lineal desde la entrada φ a la salida $(-d[\sigma]/dt)$

$$k(p) = c^*(A - pl)^{-1}b - \rho \quad (p \in \mathbb{C}).$$

Teorema 1.32. *Supongamos que la matriz A no tiene valores propios imaginarios puros. Supongamos que el par (A, b) es controlable, el par (A, c) es observable y $K(0) \neq 0$. Supongamos también que existen números $\aleph, \varepsilon > 0$ y $\tau \geq 0$ tal que se cumple la siguiente desigualdad en el dominio de la frequencia:*

$$Re\{\aleph K(i\omega) + \tau[\mu_1 K(i\omega) + i\omega]^*[\mu_2 K(i\omega) + i\omega]\} - \varepsilon|K(i\omega)|^2 \geq 0 \quad (\forall \omega \in \mathbb{R}). \tag{1.31}$$

Entonces, el sistema (1.29), (1.30) es casi dicotomía.

Daremos algunas afirmaciones simples antes de la prueba del teorema.

Introduzcamos una matriz Q $(n+1)\times(n+1)$ y un vector L $(n+1)$:

$$Q = \begin{Vmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad L = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Lema 1.33. *Si el par (A, b) es controlable, el par (Q, L) es controlable también.*

Demostración. De acuerdo a la afirmación 2 del teorema (1.2) la controlabilidad del par (A, b) implica la igualdad

$$rank\|b, Ab, \ldots, A^{n-1}b\| = n.$$

Por lo tanto y de la igualdad obvia

$$\|L, QL, \ldots, Q^nL\| = \begin{Vmatrix} 0 & b & Ab & \ldots & A^n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}$$

se sigue que

$$rank\,\|L, QL, \ldots, Q^nL\| = n+1,$$

lo cual es equivalente a controlabilidad del par (Q, L). El lema está probado. $\square$

Introduzcamos un vector D, $(n+1)$ dimensional

$$D = \begin{Vmatrix} c \\ p \end{Vmatrix}$$

y una forma Hermitiana

$$\mathcal{G}(\upsilon, \psi) = Re\{\varepsilon\upsilon^*DD^*\upsilon + \aleph\upsilon^*LD^*\upsilon + \tau(\mu_1D^*\upsilon - \psi)^*(\psi - \mu_2D^*\upsilon)\},$$

donde $\aleph$, μ_1, μ_2 y τ son números.

Lema 1.34. *Para todo número complejo $p \neq 0$ el cual no coincide con los valores propios de la matriz A, se cumple que*

$$\mathcal{G}\left[(pI-Q)^{-1}L\psi, \psi\right] = \\ -|p|^{-2}Re\left\{\aleph K(p) - \varepsilon|K(p)|^2 + \tau(\mu_1K(p)+p)^*(\mu_2K(p)+p)\right\}|\psi|^2$$

para todo $\psi \in \mathbb{C}$.

Demostración. Note primero que para probar el lema es suficiente demostrar

$$D^*(Q - pI)^{-1}L = p^{-1}K(p), \tag{1.32}$$

$$L^*(Q - pI)^{-1}L = -p^{-1}. \tag{1.33}$$

Considere la igualdad obvia

$$\begin{Vmatrix} (A - pI) & b \\ 0 & -p \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} (A - pI)^{-1}b \\ -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ p \end{Vmatrix}$$

y multiplique ambos lados por la matriz

$$\begin{Vmatrix} (A - pI) & b \\ 0 & -p \end{Vmatrix}.$$

Como resultado tenemos la identidad

$$p(Q - pI)^{-1}L = \begin{Vmatrix} (A - pI)^{-1}b \\ -1 \end{Vmatrix}. \tag{1.34}$$

Multiplicando ambas por D^* obtenemos (1.32). Multiplicando ambas partes por L^* obtenemos (1.33). $\square$

Demostración del Teorema 1.32. Sea $(x(t), \sigma(t))$ una solución acotada de (1.29). Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi'(\sigma)$ no existe. Note que el conjunto

$$\mathcal{M} = \{t \in \mathbb{R}_+ \mid \sigma(t) \in \mathcal{A},\ \dot{\sigma}(t) \neq 0\}$$

consiste de puntos aislados. Como $\varphi(\sigma)$ es Lipschitzian en $\mathbb{R}$ tenemos

$$\left| \frac{\varphi(\sigma(t + \Delta t)) - \varphi(\sigma(t))}{\Delta t} \right| \leq L \left| \frac{\sigma(t + \Delta t) - \sigma(t)}{\Delta t} \right| \quad (L > 0)$$

y así $d[\varphi(\sigma(t))]/dt = 0$ si $\dot{\sigma} = 0$. (Si $\dot{\sigma}(t) \neq 0$ y $\sigma(t) \notin \mathcal{A}$ entonces $d[\varphi(\sigma(t))]/dt = \varphi'(\sigma(t))\dot{\sigma}(t)$). Así $d[\varphi(\sigma(t))]/dt$ existe para todo $t \geq 0$.

Introducimos la función

$$\upsilon(t) = \begin{Vmatrix} z(t) \\ \varphi(\sigma(t)) \end{Vmatrix}, \quad \psi(t) = \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t)).$$

Entonces las funciones $z(t)$ y $\sigma(t)$ satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} \frac{d\upsilon(t)}{dt} &= Q\upsilon(t) + L\psi(t), \\ \frac{d\sigma(t)}{dt} &= D^*\upsilon(t). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Considere la forma cuadrática

$$G(\upsilon,\psi)=2\upsilon^*H(Q\upsilon+L\psi)+\varepsilon\upsilon^*DD^*\upsilon+\aleph\upsilon^*LD^*\upsilon+\tau(\mu_1D^*\upsilon-\psi)^*(\psi-\mu_2D^*\upsilon)$$
$$\text{con}\quad\Big(\upsilon\in\mathbb{R}^{n+1},\ \psi\in\mathbb{R}\Big)$$

donde $\aleph$, ε y τ son introducidos en la afirmación del teorema y $H=H^*$ es una cierta $n\times n$ matriz. Del Lema 1.33 el par (Q,L) es controlable. Del Lema 1.34 y la desigualdad (1.31) tenemos

$$\mathcal{G}\Big[(i\omega I-Q)^{-1}L\psi,\psi\Big]\le 0\quad(\forall\psi\in\mathbb{C},\ \omega\neq 0).$$

Por lo tanto, de acuerdo al teorema 1.18 existe $H=H^*$ tal que

$$G(\upsilon,\psi)\le 0\quad\Big(\forall\upsilon\in\mathbb{R}^{n+1},\ \forall\psi\in\mathbb{R}\Big).\tag{1.36}$$

Considere ahora la función $W(t)=\upsilon^*(t)H\upsilon(t)$ donde H es tal que se cumple (1.36). Como la solución (z,σ) del sistema (1.35) es acotada, $\upsilon(t)$ es también acotada y $W(t)$ es acotada también.

Consideremos la expresión

$$P(t)=\frac{dW(t)}{dt}+\aleph\varphi(\sigma(t))\frac{d\sigma(t)}{dt}+\varepsilon\left(\frac{d\sigma(t)}{dt}\right)^*\left(\frac{d\sigma(t)}{dt}\right).$$

Note que

$$P(t)=2\upsilon^*(t)H[Q\upsilon(t)-L\psi(t)]+\varepsilon\upsilon^*(t)DD^*\upsilon(t)+\aleph\upsilon^*(t)LD^*\upsilon(t).$$

Teniendo en cuenta (1.30) obtenemos que para casi todos $t\in\mathbb{R}_+$

$$[\mu_1\dot\sigma(t)-\psi(t)]\,[\psi(t)-\mu_2\dot\sigma(t)]\ge 0$$

o

$$[\mu_1D^*\upsilon(t)-\psi(t)]\,[\psi(t)-\mu_2D^*\upsilon(t)]\ge 0.\tag{1.37}$$

Así se sigue de (1.36) y (1.37) que

$$P(t)\le 0\quad(\text{para casi todo }\ t\ge 0).\tag{1.38}$$

Por lo tanto,

$$W(t)-W(0)\le-\aleph\int_0^t\varphi(\sigma(t))\dot\sigma(t)\,dt-\varepsilon\int_0^t\dot\sigma^2(t)\,dt$$

o

$$\varepsilon\int_0^t\dot\sigma^2(t)\,dt\le-\aleph\int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)}\varphi(\sigma)\,d\sigma-W(t)+W(0).$$

Como $\sigma(t)$ y $W(t)$ son acotadas se sigue de este último que

$$\dot{\sigma}(t) \in L^2 [0, +\infty) \tag{1.39}$$

Está claro que $\dot{\sigma}(t)$ es uniformemente continua en $[0, +\infty)$. En efecto, según (1.29) para una solución acotada $(z(t), \sigma(t))$, las derivadas $\dot{z}$ y $\dot{\sigma}$ están acotadas para $t \geq 0$. Por otro lado $d[\varphi(\sigma(t))]/dt$ es acotada puesto que $\dot{\sigma}$ y σ están acotadas por $t > 0$. Así de (1.29), $\dot{\sigma}(t)$ tiene una derivada acotada para casi todo $t \geq 0$. Por lo tanto, $\dot{\sigma}(t)$ es uniformemente continuo en $[0, +\infty)$. Entonces de acuerdo al lema (1.23) concluimos de (1.39) que

$$\dot{\sigma}(t) \to 0 \quad \text{cuando } t \to +\infty. \tag{1.40}$$

Puesto que la trayectoria $(z(t), \sigma(t))$ de (1.29) es acotada, el conjunto Ω de sus puntos ω–limite son no vacíos. A través de cualquier elemento de Ω pasa una trayectoria que consiste solo de puntos ω–limites. Por lo que para cualquier trayectoria perteneciente a Ω se cumple que

$$\dot{\sigma}(t) = 0$$

y consecuentemente

$$\sigma(t) = \sigma_0 = \text{constante}.$$

Entonces de la segunda ecuación de (1.29) tenemos que para trayectorias pertenecientes a Ω se cumple que

$$c^* z(t) + \rho\varphi(\sigma(t)) = 0, \quad \varphi(\sigma(t)) = \varphi(\sigma_0) = \text{constante}$$

Así, para trayectorias pertenecientes a Ω tenemos

$$c^* z(t) = -\rho\varphi(\sigma_0) \quad \text{ y } \quad c^* \dot{z}(t) = 0.$$

Ahora usemos la primera ecuación de (1.29), esto implica que si la trayectoria $(z(t), \sigma(t))$ perteneciente a Ω, se cumple que

$$c^* Az(t) = -c^* b\varphi(\sigma_0) \quad \text{y consecuentemente} \quad c^* A\dot{z}(t) = 0.$$

De la ultima igualdad y de la primera ecuación de (1.29) obtenemos

$$c^* A^2 z(t) = -c^* Ab\varphi(\sigma_0) \quad \text{y consecuentemente} \quad c^* A^2 \dot{z}(t) = 0$$

y así sucesivamente. Como resultado obtenemos el sistema algebraico

$$\begin{aligned} c^* z &= -\rho\varphi(\sigma_0), \\ c^* Az &= -c^* b\varphi(\sigma_0), \\ c^* A^2 z &= -c^* Ab\varphi(\sigma_0), \\ &\vdots \\ c^* A^{n-1} z &= -c^* A^{n-2} b\varphi(\sigma_0). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Puesto que el par (A, c) es observable tenemos $rank \left\| c, A^*c, \ldots, (A^*)^{(n-1)}c \right\| = n$ (ver teorema 1.5) y se sigue que el sistema (1.41) tiene una única solución $z(t) = z_0$. Entonces de (1.29) se sigue que

$$Az_0 + b\varphi(\sigma_0) = 0 \quad y \quad c^* z_0 + \rho\varphi(\sigma_0) = 0.$$

Por lo tanto y como $K(0) \neq 0$ concluimos que $\varphi(\sigma_0) = 0$ y $z_0 = 0$.

Note que, como $detA \neq 0$, tenemos $\Lambda = \{(z_{eq}, \sigma_{eq}) \mid z_{eq} = 0,\ \varphi(\sigma_{eq}) = 0\}$ el conjunto de equilibrio. Así hemos probado que $\Omega = \Lambda$. Suponga ahora que la solución acotada $(z(t), \sigma(t))$ no tiende a Λ cuando $t \to +\infty$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ y una sucesión $\{t_k\}$, $t_k \to +\infty$ cuando $k \to +\infty$, tal que

$$dist\,[(z(t_k), \sigma(t_k)), \Lambda] \geq \varepsilon.$$

Como $(z(t), \sigma(t))$ es acotado existe una subsucesión $\{t_{k_l}\}$, tal que $(z(t_{k_l}), \sigma(t_{k_l})) \to (z_0, \sigma_0) \in \Omega$. Entonces

$$dist\,[(z_0, \sigma_0), \Lambda] > \varepsilon/2$$

y (z_0, σ_0) no pertenece a Λ, lo cual contradice el hecho que $\Omega = \Lambda$. La prueba esta completa. $\square$

Corolario 1.35. *Si se cumplen las hipótesis del teorema 1.32 entonces para cualquier solución acotada de* (1.29)

$$z(t) \to 0 \quad y \quad \varphi(\sigma(t)) \to 0 \text{ cuando } t \to +\infty.$$

Esta afirmación se sigue de la estructura del conjunto de equilibrio Λ

El teorema 1.32 da condiciones suficientes de casi dicotomía. Demostremos ahora que bajo ciertas condiciones este se transforma en un críterio dominio frecuencia de dicotomía.

Teorema 1.36. *Si se cumplen las hipótesis del teorema 1.32 y la matriz A es Hurwitziana entonces el sistema* (1.29) *es dicotómico.*

Demostración. Consideremos el sistema (1.29). Por la propiedad de casi dicotomía, para cualquier solución acotada (z, σ) tenemos $\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$. Suponga ahora que la componente $\sigma(t)$ de una cierta solución acotada no converge cuando $t \to +\infty$, a un cierto cero de $\varphi(\sigma)$. En este caso encontramos al menos dos sucesiones $\{t_k\}$ y $\{\tau_k\}$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \sigma(t_k) = \sigma' \quad \text{y} \quad \lim_{k\to+\infty} \sigma(\tau_k) = \sigma''$$

con $\sigma' < \sigma''$. Como $\sigma(t)$ es continua podemos encontrar para cualquier $\nu \in [\sigma', \sigma'']$ una sucesión $\{u_k\}$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \sigma(u_k) = \nu.$$

Por la propiedad de casi dicotomía del sistema se tiene que $\{z = 0,\ \sigma = \nu\}$ es una solución estacionaria de (1.29) y consecuentemente $\varphi(\nu) = 0$. Así $\varphi(\sigma) = 0$ para todo $\sigma \in [\sigma', \sigma'']$. Consideremos el conjunto

$$\Pi := \{(z, \sigma) \mid \sigma \in [\sigma', \sigma'']\}.$$

Sobre la banda Π el sistema (1.29) es el siguiente

$$\dot{z} = Az. \quad \dot{\sigma} = c^* z.$$

Fijemos un número $\nu \in [\sigma', \sigma'']$ y consideremos un $\overline{\sigma} \neq \nu$, $\overline{\sigma} \in [\sigma', \sigma'']$. Como la matriz A tiene valores propios con partes reales negativas solamente, el equilibrio $(0, \overline{\sigma})$ es estable. Se sigue que para cualquier vecindad U_1 de $z = 0$, $\sigma = \overline{\sigma}$ existe otra vecindad U_2 tal que la solución de (1.29) que comienza en U_2 están en U_1 para t suficientemente grande. Esto se contradice con el hecho de que $\sigma(u_k) \to \upsilon$. El teorema está probado. $\square$

Consideremos ahora el caso donde $\varphi(\sigma)$ tiene un número finito de ceros aislados. Necesitamos la siguiente afirmación auxiliar.

Lema 1.37. *Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua con un número finito de ceros aislados. Sea $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces la relación*

$$\psi(\alpha(t)) \to 0 \text{ con } t \to +\infty$$

implica la relación

$$\alpha(t) \to \hat{\alpha} \text{ con } t \to +\infty,$$

donde $\psi(\hat{\alpha}) = 0$.

Demostración. Sea m_0 la distancia mínima entre los ceros de ψ y sea $\delta \in (0, m_0/2)$.

Introducimos el conjunto

$$\mathcal{A} := \{\alpha \mid \alpha \notin \cup_k(\alpha_k - \delta, \alpha_k + \delta), \psi(\alpha_k) = 0\}$$

y el número

$$m := \min_{\alpha\in\mathcal{A}} |\psi(\alpha)|.$$

Suponga que $\varepsilon < m$. Entonces las desigualdad $|\psi(\alpha)| < \varepsilon$ implica que α pertenece a la δ vecindad de algún cero de la función ψ. Denotemos este por $\hat{\alpha}$. Puesto que $\psi(\alpha(t)) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ existe un $T > 0$ tal que para $t > T$, $\alpha(t)$ pertenece a la δ vecindad de $\hat{\alpha}$. Puesto que podemos elegir δ tan pequeño como se requiera, se sigue conclusión del lema es cierta. □

Teorema 1.38. *Si se cumplen las hipótesis del teorema 1.32 y $\varphi(\sigma)$ tiene un número finito de ceros aislados entonces el sistema* (1.29) *es dicotómico.*

La validez de este teorema se sigue inmediatamente del corolario 1.35 y del lema 1.37.

Observación 1.2.2. *Si el sistema* (1.29) *no tiene la propiedad* (1.30) *entonces el teorema 1.32 se puede aplicar con $\tau = 0$.*

Vamos a ampliar el teorema 1.32 por una afirmación simple la cual da una condición necesaria para que la hipótesis (1.31) se cumpla. Para el propósito consideramos el sistema lineal

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Az + mb\sigma, \\ \frac{d\sigma}{dt} &= c^* z + m\rho\sigma. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Teorema 1.39. *Supongamos que A no tiene valores propios imaginarios puros. Si para un cierto $m \in (\mu_1, \mu_2)$ la matriz del sistema lineal* (1.42) *tiene un valor propio imaginario puro $i\omega_0$ con $\omega_0 \neq 0$ entonces la desigualdad dominio frequencia* (1.31) *no puede ser verdadera para todo $\omega \in \mathbb{R}$.*

Demostración. La ecuación característica del sistema (1.42) esta dada por

$$det \begin{bmatrix} pI - A & -mb \\ -c^* & p - m\rho \end{bmatrix} = 0$$

De acuerdo al lema (1.17) podemos transformar la última ecuación a la forma

$$det(pI - A)\, det \left[(p - m\rho) - mc^*(pI - A)^{-1} b \right] = 0.$$

Como $p = i\omega_0$ es una raíz de esta ecuación y A no tiene valores propios imaginarios puros, se tiene que

$$i\omega_0 - m \left(\rho - c^*(A - i\omega_0 I)^{-1} b \right) = 0$$

o

$$K(i\omega_0) = -\frac{i\omega_0}{m}.$$

No es difícil ver que para $\omega = \omega_0$ la desigualdad (1.31) es falsa. En efecto, $Re\ K(i\omega_0) = 0$ y

$$[\mu_1 K(i\omega_0) + i\omega_0]^*[\mu_2 K(i\omega_0) + i\omega_0] = \frac{\omega_0^2}{m^2}[(m - \mu_1)(m - \mu_2)].$$

Así para $m \in (\mu_1, \mu_2)$

$$[\mu_1 K(i\omega_0) + i\omega_0]^*[\mu_2 K(i\omega_0) + i\omega_0] < 0.$$

El teorema 1.39 está probado. □

1.2.3 Comportamiento global de circuitos de Chua

Vamos aplicar los resultados anteriores a un sistema diferencial 3 dimensional con linealidades lineales por tramos. Este tipo de sistemas fué introducido en la teoía cualitativa de ecuaciones diferenciales por L.O. Chua. Tales sistemas describen la dinámica de circuitos electrónicos los cuales son conocidos como circuitos de Chua. Investigaciones de sistemas de Chua mostraron que ellos pueden tener movimientos caóticos. Esto hace que estos sistemas se hayan convertidio en objeto de intensas investigaciones [Chua & Lin 1975[32], Chua& Kang 1977[34], Zhong & Ayron 1985[82], Matsumoto et al 1985[58], Parker & Chua 1987[66], Kahler & Chua 1986[46], Chua 1980[28], Matsumoto et al 1984[57], Matsumoto et al 1986[59], Ogorzalek 1987[63], Orgorzalet 1989[64], Chua 1992[29], Rabinder 1993[69], Chua & Green 1976[31], Chua et al 1986[30], Chua & Lin 1990[33]]. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k\alpha[y - x - f(x)] \\ \dot{y} &= k[x - y + \xi] \qquad\qquad (x, y, \xi \in \mathbb{R}) \\ \dot{\xi} &= k[-\beta y - \omega\xi] \end{aligned} \tag{1.43}$$

donde

$$f(x) = b_0 x + \frac{1}{2}(a_0 - b_0)[|x + 1| - |x - 1|] \tag{1.44}$$

y α, β, γ, k, a_0, b_0 son números, k siendo igual a 1 o a (-1). Los posibles gráficos de $f = f(x)$ en el caso $a_0 > 0$ se muestran en la figura 1.2

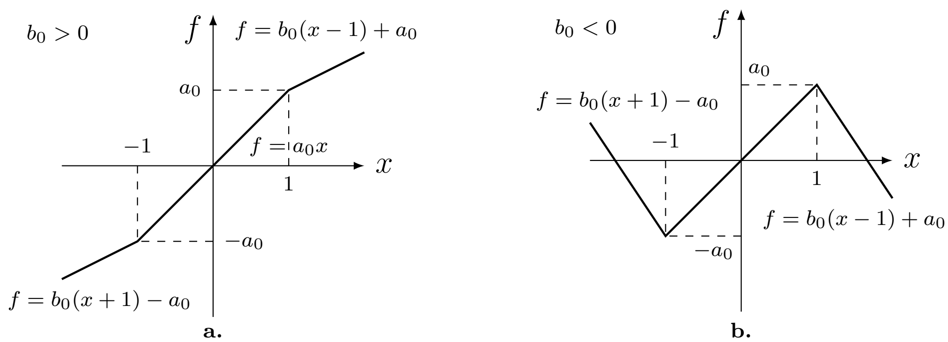

Figura 1.2: Posibles gráficos de $f = f(x)$ en el caso $a_{0>0}$

Miremos el conjunto de equilibrio de (1.43), (1.44). Sean $x \equiv x_{eq}$, $y \equiv y_{eq}$, $\xi \equiv \xi_{eq}$. Obtenemos el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{cases} y_{eq} - x_{eq} - f(x_{eq}) = 0, \\ x_{eq} - y_{eq} + \xi_{eq} = 0, \\ -\beta y_{eq} - \gamma \xi_{eq} = 0. \end{cases}$$

En el caso $\beta = -\gamma$, se sigue que $x_{eq} = y_{eq} = \xi_{eq} = 0$ y el punto de equilibrio es único. Sea $\beta \neq -\gamma$, entonces, para los puntos de equilibrio, se cumplen las relaciones

$$f(x_{eq}) = -\frac{\beta x_{eq}}{\gamma + \beta}, \quad y_{eq} = -\frac{\gamma x_{eq}}{\gamma + \beta}, \quad \xi_{eq} = -\frac{\beta x_{eq}}{\gamma + \beta}.$$

Es claro que la cantidad de puntos de equilibrio depende de la cantidad de los puntos de intersección de la curvas $f = f(x)$ y $f = -\beta x/(\gamma + \beta)$. Puede existir un solo equilibrio (ver figura 1.3-a), tres equilibrios (ver figura 1.3-b) y un intervalo de equilibrios (ver figura 1.3-c).

El teorema 1.32 da la oportunidad para determinar casos de estabilidad global y dicotomía, es decir, lo casos para los cuales la oscilación caótica es imposible.

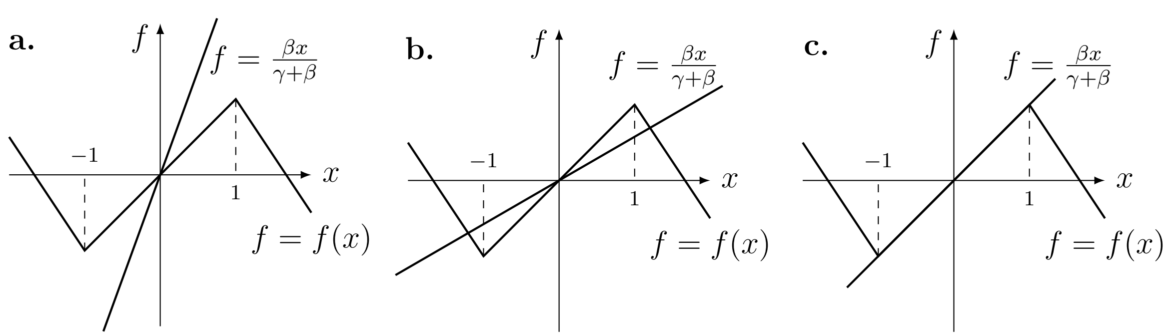

Figura 1.3: Posibles conjuntos de equilibrio de los sistemas (1.43)–(1.44).

Teorema 1.40. *Si para algún* $m \in (\text{mín}\{a_0, b_0\}, \text{máx}\{a_0, b_0\})$ *las desigualdades*

$$\begin{cases} \alpha\gamma(1+m) + \alpha m + \gamma + \beta > 0, \\ 0 < k^3[\alpha\beta(1+m) + \alpha\gamma m] < k^3[1 + \gamma + \alpha(m+1)] \times [\alpha\gamma(1+m) + \alpha m + \gamma + \beta] \end{cases} \tag{1.45}$$

se cumplen, entonces, los sistemas (1.43), (1.44) *son globalmente asintóticamente estables.*

Demostración. Es claro que $f(x)$ es diferenciable excepto cuando $x = \pm 1$. Es también claro que

$$\text{mín}\{a_0, b_0\} < f'(x) < \text{máx}\{a_0, b_0\}. \tag{1.46}$$

Paralelamente con los sistemas (1.43), (1.44) consideremos un sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k\alpha[y - x - mx], \\ \dot{y} &= k[x - y + \xi], \\ \dot{\xi} &= k[-\beta y - \gamma\xi], \end{aligned} \tag{1.47}$$

donde $m \in (\text{mín}\{a_0, b_0\}, \text{máx}\{a_0, b_0\})$. El polinomio característico $\Delta(p)$ del sistema (1.47) es:

$$\Delta(P) = p^3 + p^2 k[1+\gamma+\alpha(m+1)] + pk^2[\alpha\gamma(1+m)+\alpha m+\gamma+\beta] + k^3[\alpha\gamma m+\alpha\beta(1+m)].$$

De acuerdo al teorema 1.13 el sistema de desigualdades (1.45) es una condición necesaria y suficiente para que todos los ceros de $\Delta(p)$ estén en el semiplano abierto izquierdo del plano complejo. Así, bajo las hipótesis del teorema, el sistema lineal (1.47) es estable para cualquier $m \in (\text{mín}\{a_0, b_0\}, \text{máx}\{a_0, b_0\})$.

Para hacer una conclusión relativa al sistema no lineal (1.43) se recurre a los resultados conocidos que establecen la relación entre la estabilidad del sistema de control no lineal y el correspondiente lineal. Estos resultados se obtuvieron en el marco de la conjetura de Kalman.

Esto último se refiere al sistema

$$\dot{x} = Px + q\psi, \quad \sigma = r^* x, \quad \psi = \varphi(\sigma) \tag{1.48}$$

y es formulada como sigue. Si para algún $m \in (m_1, m_2)$ la matriz $P + mqr^*$ es Hurwitzian, entonces, para cualquier $\varphi(\sigma)$ continuamente diferenciable por tramos tal que $\varphi'(\sigma) \in (m_1, m_2)$ para todo σ, el sistema no lineal (1.48) es asintóticamente estable.

Fué probado en [Barabanov 1988][17] que para $n = 3$ la conjetura de Kalman es cierta. Por lo tanto, si el sistema (1.47) es estable para algún $m \in (m_1, m_2)$ entonces, el sistema (1.43) es globalmente asintóticamente estable para algún $f(x)$ con $f'(x) \in (m_1, m_2)$ para todo x. Por linealidad (1.44) $m_1 = \text{mín}\{a_0, b_0\}$, $m_2 = \text{máx}\{a_0, b_0\}$. Así el teorema está probado. □

Teorema 1.41. *Si k, a_0, b_0, α, β, γ son números positivos entonces el sistemas* (1.43), (1.44) *es globalmente asintóticamente estables.*

Demostración. Es fácil ver que en el caso de que los números k, α, β y γ sean positivos, las desigualdades (1.45) son ciertas para cualquier m positivo. Así el teorema queda probado. □

Las desigualdades (1.45) pueden ser fácilmente transformadas en condiciones suficientes para una clase de sistemas lineales (1.47) con $m \in (m', m'')$ (m', m'' son ciertos números) teniendo el mismo arreglo de ceros sobre el plano complejo.

En efecto, es suficiente requerir que $\Delta(p)$ no tiene raíces sobre el eje el eje imaginario para todo $m \in (m', m'')$. Puesto que

$$\begin{aligned}\Delta(i\omega) = &\left[-k(1+\gamma+\alpha(1+m))\omega^2 + k^3(\alpha\beta(1+m)+\alpha\gamma m)\right] + \\ &+ i\omega\left[-\omega^2 + k^2(\alpha\gamma(1+m)+\alpha m+\gamma+\beta)\right]\end{aligned}$$

debemos tener que $\Delta(i\omega) \neq 0$ si requerimos que para todo $m \in (m', m'')$

$$\begin{cases} \alpha\beta(m+1)+\alpha\gamma m \neq 0, \\ \alpha\beta(m+1)+\alpha\gamma m \neq [\alpha(m+1)+\gamma+1][\alpha\gamma(m+1)+\alpha m+\gamma+\beta]. \end{cases}$$

Note que si

$$\alpha\beta(m+1)+\alpha\gamma m = 0 \tag{1.49}$$

entonces, $\Delta(0) = 0$, pero el hecho que

$$\alpha\beta(m+1)+\alpha\gamma m = [\alpha\gamma(m+1)+\alpha m+\gamma+\beta][\alpha(m+1)+\gamma+1] \tag{1.50}$$

no es suficiente para $\Delta(i\omega) = 0$, $(\omega_0 \neq 0)$. En realidad para garantizar que $\Delta(i\omega) = 0$ requerimos que

$$[\alpha\beta(m+1)+\alpha\gamma m][\alpha(m+1)+\gamma+1] > 0. \tag{1.51}$$

Así el arreglo de las raíces de $\Delta(p) = 0$ sobre el plano complejo cambia o si la igualdad (1.49) o si el sistema (1.50), (1.51) se cumplen.

Ejemplo 1.42. Vamos a considerar el sistema concreto de Chua [Chua 1992]

$$\begin{aligned}\frac{d\upsilon_1}{dt} &= \frac{1}{C_1}\left[\frac{\upsilon_2-\upsilon_1}{R} - f(\upsilon_1)\right],\\ \frac{d\upsilon_2}{dt} &= \frac{1}{C_2}\left[\frac{\upsilon_1-\upsilon_2}{R} + i_3\right],\\ \frac{di_3}{dt} &= \frac{1}{L}\left[-\upsilon_2 - R_0 i_3\right],\end{aligned} \tag{1.52}$$

con

$$f(\upsilon_1) = G_b\upsilon_1 + \frac{1}{2}(G_a - G_b)[|\upsilon_1+1| - |\upsilon_1-1|]. \tag{1.53}$$

Vamos a investigar la dinámica de (1.52), (1.53) primeramente con la ayuda de los resultados vistos y con el Teorema 1.32.

1. El sistema lineal correspondiente tiene la forma

$$\begin{aligned}\frac{d\upsilon_1}{dt} &= -\frac{1}{C_1R}\upsilon_1 + \frac{1}{C_1R}\upsilon_2 - \frac{m}{C_1}\upsilon_1,\\ \frac{d\upsilon_2}{dt} &= -\frac{1}{C_2R}\upsilon_1 + \frac{1}{C_2R}\upsilon_2 + \frac{m}{C_2}i_3,\\ \frac{di_3}{dt} &= -\frac{1}{L}\upsilon_2 - \frac{R_0}{L}i_3\end{aligned} \tag{1.54}$$

   con polinomio característico

$$\begin{aligned}\Delta(p) = p^3 + p^2\left[\frac{m}{C_1} + \left(\frac{1}{C_1R} + \frac{1}{C_2R} + \frac{R_0}{L}\right)\right] + p\left[m\left(\frac{1}{C_1C_2R} + \frac{R_0}{LC_1}\right) + \right.\\ \left. + \left(\frac{R_0}{LC_1R} + \frac{R_0}{LC_2R} + \frac{1}{LC_2}\right)\right] + \left[m\left(\frac{R_0}{C_1C_2LR} + \frac{1}{C_1C_2L}\right) + \frac{1}{C_1C_2RL}\right].\end{aligned}$$

   Así (1.49) toma la forma

$$m = m_0 := -\frac{1}{R_0+R} \tag{1.55}$$

   y los sistemas (1.50), (1.51) toman la forma

$$\begin{cases}\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{C_1C_2R} + \frac{R_0}{LC_1}\right)m^2 + m\left[\frac{R_0}{C_1^2LR} + \left(\frac{1}{C_1R} + \frac{1}{C_2R} + \frac{R_0}{L}\right)\left(\frac{1}{C_1C_2R} + \frac{R_0}{LC_1}\right)\right]\\ + \left[\left(\frac{1}{C_1R} + \frac{1}{C_2R} + \frac{R_0}{L}\right)\left(\frac{R_0}{LC_1R} + \frac{R_0}{LC_2R} + \frac{1}{LC_2}\right) - \frac{1}{C_1C_2RL}\right] = 0,\\ \frac{1}{C_1}\left(\frac{R_0}{C_1C_2LR} + \frac{1}{C_1C_2L}\right)m^2 + m\left[\frac{1}{C_1^2C_2RL} + \left(\frac{R_0}{C_1C_2LR} + \frac{1}{C_1C_2L}\right)\right.\\ \left.\left(\frac{1}{C_1R} + \frac{1}{C_2R} + \frac{R_0}{L}\right)\right] + \frac{1}{C_1C_2RL}\left(\frac{1}{C_1R} + \frac{1}{C_2R} + \frac{R_0}{L}\right) > 0.\end{cases} \tag{1.56}$$

El sistema (1.56) puede tener no más que dos soluciones. Así el polinomio característico $\Delta(p)$ del sistema (1.54) puede tener, dos, tres o cuatro sectores de arreglos idénticos de ceros sobre el plano complejo.

En el artículo [Chua 1992] varios conjuntos de coeficientes de (1.52) son considerados. Tomemos por ejemplo el caso de $C_1 = 1$, $C_2 = -75$, $G_a = 14.7$, $G_b = 36$, $R_0 = 0.006667$, $L = 0.00744$. No es difícil verificar que para $R > 0.0274387$ el un sector (G_a, G_b) de arreglos idénticos de raíces de $\Delta(p)$ y para $R < -0.0274378$ el sector pierde esa propiedad.

2. Pasemos a investigar la dinámica del sistema no lineal (1.52). En primer lugar transformamos el sistema (1.52) a la forma del sistema (1.29). Con este fin introducimos una nueva función no lineal

$$\varphi(\sigma) = f(\sigma) + \frac{\sigma}{R_0 + R}.$$

Entonces el sistema (1.52) puede ser reescrito de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{d\upsilon_1}{dt} = \left(-\dfrac{1}{C_1 R} + \dfrac{1}{C_1(R+R_0)}\right)\upsilon_1 + \dfrac{1}{C_1 R}\upsilon_2 - \dfrac{1}{C_1}\varphi(\upsilon_1), \\ \dfrac{d\upsilon_2}{dt} = \dfrac{1}{C_2 R}\upsilon_1 - \dfrac{1}{C_2 R}\upsilon_2 + \dfrac{1}{C_2} i_3, \\ \dfrac{di_3}{dt} = -\dfrac{1}{L}\upsilon_2 - \dfrac{R_0}{L} i_3. \end{cases} \tag{1.57}$$

La matriz de la parte lineal de (1.57) tiene un valor propio cero. La función de transferencia $K(p)$ de φ a $(-d[\upsilon_1]/dt)$ puede ser calculado con ayuda de la transformada de Laplace

$$K(p) = \frac{p^2 + b_1 p + c_1}{m_1\left(p^2 + b_2 p + c_2\right)},$$

donde

$$\begin{aligned} m_1 &= C_1, \quad b_1 = \frac{1}{C_2 R} + \frac{R_0}{L}, \quad c_1 = \frac{R_0}{C_2 R L} + \frac{1}{L C_2}, \\ b_2 &= \frac{R_0}{L} + \frac{1}{C_2 R} + \frac{R_0}{C_1 R (R_0 + R)}, \\ c_2 &= \frac{R_0^2}{L C_1 R (R + R_0)} + \frac{R_0 + R}{L C_2 R} - \frac{1}{C_1 C_2 R (R + R_0)}. \end{aligned}$$

La desigualdad Dominio Frecuencia (1.31) es verificada por

$$\mu_1 = \text{mín}\{G_a, G_b\} + \frac{1}{R + R_o}, \quad \mu_2 = \text{máx}\{G_a, G_b\} + \frac{1}{R + R_o}.$$

Es fácil calcular que

$$\begin{aligned} K(i\omega) &= \frac{\omega^4 + (b_1b_2 - c_1 - c_2)\omega^2 + c_1c_2}{m_1 r^2(\omega)} + i\frac{\omega\,[\omega^2(b_2 - b_1) + b_1c_2 - b_2c_1]}{m_1 r^2(\omega)}, \\ |K(i\omega)|^2 &= \frac{\omega^4 + (b_1^2 - 2c_1)\,\omega^2 + c_1^2}{m_1^2 r^2(\omega)}, \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} &Re\{[\mu_1 K(i\omega) + i\omega]^*[\mu_2 K(i\omega) + i\omega]\} \\ &\qquad = \omega^2 + \mu_1\mu_2|K(i\omega)|^2 + (\mu_1 + \mu_2)\frac{\omega^2\,[\omega^2(b_2 - b_1) + (b_1c_2 - b_2c_1)]}{m_1 r^2(\omega)}, \end{aligned}$$

donde

$$r^2(\omega) = \omega^4 - \left(b_2^2 - 2c_2\right)\omega^2 + c_2^2.$$

Sea $\aleph = 1$. Como un resultado de (1.31) tenemos la desigualdad equivalente

$$\frac{1}{m_1^2 r^2(\omega)}\left\{A\omega^6 + B\omega^4 + C\omega^2 + D\right\} \geq 0 \quad \forall\omega \in \mathbb{R} \tag{1.58}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= m_1^2\tau; \\ B &= m_1 + \tau m_1(\mu_1 + \mu_2)(b_2 - b_1) + \tau m_1^2\left(b_2^2 - 2c_2\right) + \tau\mu_1\mu_2 - \varepsilon; \\ C &= m_1(b_1b_2 - c_1 - c_2) + \tau m_1(\mu_1 + \mu_2)(b_1c_2 - b_2c_1) + \tau m_1^2 c_1^2 + \\ &\quad + (\tau\mu_1\mu_2 - \varepsilon)\cdot(b_1^2 - 2c_1); \\ D &= m_1c_1c_2 + (\tau\mu_1\mu_2 - \varepsilon)c_1^2. \end{aligned}$$

Es claro que el paramétro ε puede ser tomado tan pequeño como deseamos. Elegimos el paramétro τ de tal modo que $D > 0$, es decir,

$$\mu_1\mu_2 c_1^2\tau > \varepsilon c_1^2 - m_1c_1c_2. \tag{1.59}$$

Así si $\mu_1\mu_2 < 0$ y $m_1c_1c_2 < 0$ la desigualdad (1.59) es falsa y (1.58) puede no cumplirse. Si $\mu_1\mu_2 < 0$ y $\varepsilon c_1^2 - m_1c_1c_2 < 0$ entonces $\tau < |(\varepsilon c_1^2 - m_1c_1c_2)\,/\,(\mu_1\mu_2c_1^2)|$, if $\mu_1\mu_2 > 0$ and $m_1c_1c_2 < 0$ entonces $\tau > |(\varepsilon c_1^2 - m_1c_1c_2)\,/\,(\mu_1\mu_2c_1^2)|$.

Vamos a considerar el polinomio

$$P(z) \equiv Az^3 + Bz^2 + Cz + D \quad (A > 0).$$

Si queremos chequear que este es no negativo para todo $z \geq 0$ es suficiente chequear que $P(0) \geq 0$ y que $P(z_0) \geq 0$ donde z_0 es la mayor de las raíces reales de la derivada

$P'(z) = 3Az^2 + 2Bz + C$ en $[0, +\infty)$. Si $P'(z)$ no tiene raíces reales para $z \geq 0$ o tiene una raíz doble, entonces, es suficiente verificar que $P(0) \geq 0$.

La desigualdad Dominio Frecuencia (1.58) fue aplicada para investigar el comportamiento asintótico de ciertas variantes del sistema (1.52). Entre estos sistemas con $c_1 = 1.0$; $c_2 = -0.75.0$; $G_a = 14.7$; $G_b = 36.0$; $R_0 = 0.006667$; $L = -0.00744$, -0.0006, -0.0105, -0.010666, -0.018133, -0.019 (estos sistemas fueron considerados en el artículo [Chua 1992][29]). En cuanto al paramétro R este fué variado de -0.066667 a 0.066667. Con ayuda de computador para cada sistema concreto el valor de $\hat{R}$ fué determinado tal que para $R \in \left[-0.066667, \hat{R}\right)$ el criterio Dominio Frecuencia no se cumple y para $R \in \left[\hat{R}, 0.066667\right]$ es valido. Es claro que si la desigualdad (1.58) es cierta para todo $\omega \geq 0$ entonces el sistema (1.52) es dicotómico y puede no tener ciclos limites o atractores fuertes. Este argumento da la oportunidad de encontrar una serie de erratas de la mecanógrafia del artículo [Chua 1992][29]. Particularmente para la Fig. 2-7 en [Chua 1992][29] esta escrito $R = 0.066667$ en vez de $R = -0.066667$. Para este último valor de R el criterio Dominio-Frecuencia del Teorema 1.32 no se cumple. En este caso la matriz del sistema lineal (1.54) corresponde a (1.52), tiene valores propios imaginarios puros (diferentes de cero) para dos valores de $m \in (G_a, G_b)$, es decir, la condición necesaria, formulada para el teorema 1.36 no se cumple.

También es claro que con la ayuda del teorema 1.32 se pueden hallar las regiones de dicotomía en el espacio de sistemas de parámetros. En tales regiones, la existencia de los ciclos limites y atractores es imposible.

1.3 Sistemas con equilibrios numerables

1.3.1 Tipo Péndulo

En esta sección presentamos una amplia clase de sistemas con conjunto de equilibrio infinito. Ellos son los denominados sistemas Tipo Péndulo. La más simple muestra de esta clase es la ecuación del péndulo matemático

$$\ddot{\sigma} + a\,\dot{\sigma} - \gamma = 0 \quad (a > 0,\ \gamma \in (0,1)).$$

Su generalización simple da la ecuación

$$\ddot{\sigma} + a\,\dot{\sigma} + \varphi(\sigma) = 0 \quad (a > 0)$$

con $\varphi(\sigma)$ función continua Δ periódica. La Investigación cualitativa de esta ecuación fue iniciada por F. Tricomi [Tricomi 1933][73], y después continuada por muchos autores entre ellos [Amerio 1949[12], Böhm 1953 [25], Hayes 1953 [44], Belyustina 1955 [22], Belyustina 1959 [23], Giger 1956[39]]. La investigación de esta ecuación de segundo orden fue seguida por la invetigación del sistema de segundo orden [Bautin 1970[**?**], Belyustina & Belych 1973[24]] y después el sistema de tercer orden [Belych & Nekorkin 1975 [20]], $\varphi(\sigma)$ permaneciendo Δ-periódica. El paso siguiente fué la investigación de sistemas n dimensional (2.1.6) con no-lonealidad periódica [Belych & Nekorkin 1977[21], Leonov 1974[52]]. La investigación de la estabilidad de esos sistemas da comienzo a nuevos métodos y procedimientos los cuales fueron desarrollados sobre la base del segundo método de Lyapunov.

Vamos ahora a presentar la definición formal del sistema tipo péndulo. Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.60}$$

donde $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz continua en el segundo argumento. Supongamos que cada solución $x(t, t_0, x_0)$ de (1.60) con $t_0 \geq 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ puede ser extendida hasta $[t_0, +\infty)$.

Sea $\Gamma := \{\sum_{j=1}^{m} k_j \, d_j \mid k_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq m\}$ donde $d_j \in \mathbb{R}^n$ los suponemos linealmente independientes ($m \leq n$).

Definición 1.43. Decimos que (1.60) es tipo péndulo con respecto a Γ si para cualquier solución $x(t, t_0, x_0)$ de (1.60) tenemos

$$x(t, t_0, x_0 + d) = x(t, t_0, x_0) + d \tag{1.61}$$

para todo $t \geq t_0$ y todo $d \in \Gamma$.

Teorema 1.44. *El sistema (1.60) es tipo péndulo con respecto a Γ si y solo si*

$$f(t, x + d) = f(t, x) \tag{1.62}$$

para todo $t \geq t_0$ y $d \in \Gamma$.

Demostración. Supongamos que se satisface (1.62). Consideremos una solución arbitraria $x(t, t_0, x_0)$ de (1.60) y definamos para $d \in \Gamma$ la función $y(t) = x(t, t_0, x_0) + d$ para $t \geq t_0$, satisfaciendo $y(t_0) = x_0 + d$. Tenemos que $\dot{y}(t) = \dot{x}(t, t_0, x_0) = f(t, x(t, t_0, x_0)) = f(t, x(t, t_0, x_0) + d) = f(t, y(t))$. Así $y(t)$ es una solución de (1.60) y por la unicidad (la cual sigue de la propiedad Lipschitz continua de $f(t, x)$ en x) $y(t) \equiv x(t, t_0, x_0)$. Para el recíproco, consideramos para $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ y $d \in \Gamma$ la solución $x(t, t_0, x_0)$ de (1.60). Se sigue que $\dot{x}(t, t_0, x_0 + d) = \dot{x}(t, t_0, x_0)$, consecuentemente $f(t, x(t, t_0, x_0 + d)) = f(t, x(t, t_0, x_0))$. Haciendo $t = t_0$ tenemos que $f(t_0, x_0 + d) = f(t_0, x_0)$. $\square$

Es claro que si $x(t) = x_{eq}$ es una solución de (1.60) entonces $x(t) = x_{eq} + d$ $(d \in \Gamma)$ también es solución de (1.60). Así el conjunto de equilibrio o es vacío o es infinito.

En lo que sigue vamos a asumir que $\Gamma = \{jd, j \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0\}$. Vamos a llamar al valor d^*x la coordenada angular o fase de (1.60).

Definición 1.45. Decimos que una solución $x(t)$ es una solución circular de (1.60) con respecto a la coordenada angular d^*x si existe un número τ y $\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}[d^*x(t)] \geq \epsilon \qquad t \geq \tau.$$

Consideramos ahora un caso autónomo de (1.60)

$$\dot{x} = f(x)$$

y asuma que este es un tipo péndulo respecto a $\Gamma = \{jd, j \in \mathbb{Z}\}$.

Las peculiaridades de las ecuaciones del tipo péndulo y las propiedades específicas de sus soluciones están estrechamente conectadas con la noción de un ciclo. Vamos a necesitar aquí dos tipos de ciclos. Recordamos que una solución no trivial de la ecuación autónoma es periódica si existe un tiempo τ tal que $x(0) = x(\tau)$. Para las ecuaciones del tipo péndulo esta solución también se denomina *ciclo de primera especie.*

Definición 1.46. Una solución $x(t, x_0)$ de la ecuación autónoma tipo péndulo es llamada un ciclo de segundo especie con respecto a la coordenada de fase d^tx si existe un número positivo τ y un entero $j \neq 0$ tal que

$$x(\tau, x_0) - x_0 = jd.$$

Vamos ahora a considerar un sistema de control

$$\dot{x} = Px + q\varphi(t, \sigma), \qquad \sigma = r^*x \tag{1.63}$$

donde P es una matriz constante $n \times n$, q y r son n vectores constantes. Supongamos que la función de transferencia $\chi(p) = r^*(P - pI)^{-1}q$ es no degenerada. Supongamos que (1.63) es tipo éndulo con respecto a $\Gamma = \{jd, j \in \mathbb{Z}\}$, donde d es un n vector no nulo.

Teorema 1.47. *Para el sistema tipo péndulo con respecto a $\Gamma = \{jd, j \in \mathbb{Z}\}$ el sistema (1.63) se puede suponer, sin perdida de generalidad, que $Pd = 0$ y $\varphi(t, \sigma)$ es r^*d-periódica en el segundo argumento.*

Demostración. Por el Teorema (1.44) tenemos

$$Pd + q\varphi(t, r^*x + r^*d) = q\varphi(t, r^*x)$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. Esta igualdad es equivalente a

$$Pd + q\varphi(t, \sigma + r^*d) = q\varphi(t, \sigma) \tag{1.64}$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Como $\chi(p)$ es no degenerada la pareja (P, q) es controlable. Entonces $q \neq 0$. Vamos a demostrar que $r^t d \neq 0$. Supongamos lo contrario, esto es $r^*d = 0$. Entonces se sigue de (1.64) que

$$r^* P^k d = 0 \quad \text{para} \quad k = 0, \dots, n-1. \tag{1.65}$$

Así el vector d es una solución del sistema lineal $Tx = 0$ con la matriz

$$T^* = \left|\left|r, P^* r, \dots, (P^{n-1})^* r\right|\right|.$$

Donde $\chi(p)$ es no degenerada, la pareja (P^*, q) es controlable y la matriz T tiene rango n. Se sigue que $d = 0$, lo cual contradice el hecho que (1.63) es tipo péndulo. Así $r^* d \neq 0$. Vamos a reescribir el sistema (1.63) en la forma

$$\dot{x} = (P - \alpha q r^*)x + q\varphi_1(t, r^* x), \tag{1.66}$$

donde

$$\alpha = \frac{q^* Pd}{|q|^2 r^* d} \qquad \text{and} \qquad \varpi_1(t, \sigma) = \varphi(t, \sigma) + \alpha\sigma$$

para todo $(t, \sigma) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. De (1.64) tenemos

$$\frac{q^* Pd}{|q|^2} + \varphi(t, \sigma + r^* d) = \varphi(t, \sigma)$$

por lo tanto se sigue que

$$\varphi_1(t, \sigma + r^* d) = \varphi(t, \sigma + r^* d) + \alpha(\sigma + r^* d) = \varphi(t, \sigma) + \alpha\sigma = \varphi_1(t, \sigma)$$

para todo $(t, \sigma) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Entonces se sigue de (1.66) por el teorema (1.44) que

$$(P - \alpha q r^*)d = 0.$$

$\square$

El sistema (1.63) con $\det P = 0$ y $\varphi(t,\sigma)$ $\Delta-$periódica es llamado *sistema tipo péndulo en la primera forma canónica*. Es obvio que si $\det P = 0$ y $\varphi(t,\sigma)$ $\Delta-$periódica en σ entonces (1.63) es un sistema tipo péndulo. En efecto, sea s un vector propio de P correspondiente con el valor propio cero. Entonces se tiene (1.64) con $d = \Delta s / r^* s$. Note que $r^* s \neq 0$. En efecto, de otro modo tendríamos $r^* P^k s = 0$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ por lo tanto se sigue en virtud de la contrabilidad de (P^*, r) que $s = 0$. lo cual es una contradicción.

Al comienzo de esta sección mostramos que el sistema (1.63) con $\det P = 0$ puede ser reescrito en la forma

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Az + b\varphi(t,\sigma), \\ \frac{d\sigma}{dt} &= c^* z + \rho\varphi(t,\sigma) \end{aligned} \tag{1.67}$$

donde A es una matriz $(n-1)\times(n-1)$, b y c son $(n-1)$ vectores y ρ es un número. Al sistema (1.67) con una función no lineal φ $\Delta-$periódica en σ lo llamamos *segunda forma canónica de un sistema tipo péndulo.*

El sistema (1.67) se caracteriza por una función de transferencia de su parte lineal de entrada φ a la salida $(-d[\sigma]/dt)$

$$K(p) = c^* (A - pI)^{-1} b - \rho.$$

es claro que $K(p) = p\chi(p)$.

Observación 1.3.1. *Vamos a considerar el caso autónomo de (1.67)*

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Az + b\varphi(\sigma), \\ \frac{d\sigma}{dt} &= c^* z + \rho\varphi(\sigma). \end{aligned}$$

En paralelo con el espacio fase $\mathbb{R}^n$ podemos introducir para este un espacio fase llamado espacio fase cilíndrico.

Note que la condición natural que debe ser satisfecha por un espacio fase de un modelo matemático de un cierto sistema es que cada estado físico del sistema corresponda uno y solo un punto del espacio fase. De este punto de vista el espacio $\{(\sigma, z_1, \ldots, z_{n-1})\}$ podría no servir satisfactoriamente como un espacio de fase de nuestro sistema.

En efecto, considere por ejemplo el sistema de segundo orden

$$\dot{\sigma} = z,$$

$$\dot{z} = -az - \sin\sigma + \gamma,$$

la cual es equivalente a la ecuación del péndulo matemático. Si aumentamos o disminuimos el valor σ por 2π el nuevo estado físico del péndulo no será diferente del inicial. Consecuentemente, existen infinitos puntos sobre el plano $\{(\sigma, z)\}$ que corresponden al mismo estado físico del péndulo. estos puntos caen sobre el eje σ y la distancia entre ellos es de $2\pi k$, $(k \in \mathbb{Z})$.

El requerimiento de una correspondencia uno a uno entre el estado físico y el punto del espacio fase se cumplirá si introducimos clases módulo Δ $(\sigma \mod \Delta, z_1, \ldots, z_{n-1})$ el cual forma un anillo de residuos módulo σ $\{(\sigma \mod \Delta, z_1, \ldots, z_{n-1})\}$. este conjunto tiene una estructura natural de variedad suave la cual es difeomorfa a la superficie de un cilindro $C_0 \times \mathbb{R}^{n-1}$ (donde C_0 es un circuló de radio 1). Es por ello que el espacio $\{(\sigma \mod \Delta, z_1, \ldots, z_{n-1})\}$ es llamado el espacio cilíndrico. El espacio

$$\mathbb{R}^n = \{(\sigma, z_1, \ldots, z_{n-1})\}$$

es llamado el espacio cubierta para $\{(\sigma \mod \Delta, z_1, \ldots, z_{n-1})\}$. Dado que el sistema autónomo que se considera tiene junto con cualquier solución $(\sigma(t), z(t))$ el conjunto de soluciones $(\sigma(t) + j\Delta, z(t))$ con $j \in \mathbb{Z}$, el espacio $\{(\sigma \mod \Delta, z_1, \ldots, z_{n-1})\}$ es un espacio de fase para este.

Además vamos a investigar el comportamiento asintótico del sistema tipo péndulo. Está claro que en caso $\varphi(t, \lambda) \equiv 0$ para $t > t_0$ y un cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto de equilibrio de (1.63) es no vacío. En este caso es natural a ensayar a deducir condiciones bajo la cual (1.63) es tipo gradiente. También es natural intentar aplicar aquí el método directo de Lyapunov.

Vamos a considerar el sistema (1.63) con $\det P = 0$ y φ $\Delta-$periódica. Supongamos que $\varphi(t, 0) \equiv 0$ y existen dos constantes μ_1 y μ_2 tal que

$$\mu_1 \leq \frac{\varphi(t, \sigma)}{\sigma} \leq \mu_2 \tag{1.68}$$

para todo $\sigma \neq 0$ y $t \in \mathbb{R}_+$. Es claro que $\mu_1 \mu_2 < 0$. (El caso trivial $\mu_1 = \mu_2 = 0$ lo excluimos).

Una función de Lyapunov estándar para investigar comportamiento global del sistema bajo consideración es la forma cuadrática $V(x) = x^* Hx$, donde $H = H^*$ es una matriz $n \times n$ a determinar. En realidad para garantizar que la derivada de V a lo largo de trayectorias de (1.63) con no linealidades satisfaciendo (1.68) es menor o igual a cero debemos mostrar que para un cierto $\tau \geq 0$

$$2x^* H(Px + q\xi) + \tau(\xi - \mu_1 r^* x)(\mu_2 r^* x - \xi) \leq 0 \tag{1.69}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Demostraremos que para el sistema tipo péndulo (1.63) el parámetro τ es necesariamente igual a cero. En efecto, para $\xi = 0$ se sigue de (1.69) que

$$2x^* HPx \leq \tau\mu_1\mu_2(r^* x)^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $Pd = 0$ ($d \neq 0$). Entonces tenemos en virtud de la controlabilidad de (P^*, r) que $r^* d \neq 0$. Por lo tanto $\tau = 0$. Así (1.69) se transforma en

$$2x^* H(Px + q\xi) \leq 0 \tag{1.70}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Vamos a demostrar que la matriz H es necesariamente igual a 0. La pareja (P, q) es controlable. También lo es la pareja $(-P, -q)$. Por el Teorema (1.16) existen dos vectores s_1 y s_2 tal que la matriz $P + qs_1^*$ y $(-P - qs_2^*)$ son Hurwitzian. Colocando en (1.70) $\xi = s_1^* x$ y $\xi = s_2^* x$ obtenemos las desigualdades

$$2x^* H(P + qs_1^*)x \leq 0 \qquad \text{y} \qquad 2x^* H(P + qs_2^*)x \leq 0 \tag{1.71}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como $P + qs_1^*$ es Hurwitzian se sigue de la primera desigualdad de (1.71) que $H \geq 0$ (ver lema (1.19). Como $(-P - qs_2^*)$ es Hurwitzian se sigue de la segunda desigualdad de (1.71) que $H \leq 0$. Por lo tanto $H = 0$. Así para el sistema tipo péndulo (1.63), (1.68) no existe una función de Lyapunov como una forma cuadrática no trivial.

Ahora vamos a considerar el caso autónomo del sistema tipo péndulo (1.63):

$$\frac{dx}{dt} = Px + q\varphi(\sigma), \quad \sigma = r^* x, \quad \det P = 0, \quad \varphi(\sigma + \Delta) = \varpi(\sigma). \tag{1.72}$$

Queremos elegir una función Lyapunov del tipo "forma cuadrática mas la integral de no linealidad" (Luré-Postnikov form):

$$V(x) = x^* Hx + \nu \int_0^\sigma \varphi(\sigma)\, d\sigma.$$

sus derivadas a lo largo de las soluciones de (1.72) está dado por la fórmula

$$\dot{V}_{(1.72)} = 2x^* H(Px + q\varphi(r^* x)) + \nu\varphi(r^* x)r^* (Px + q\varphi(r^* x)).$$

Para garantizar que $\dot{V}_{(1.72)}$ es no positiva en la clase $M[\mu_1, \mu_2]$ requerimos que para una cierta mariz $H = H^*$ y parámetros ν y $\tau \geq 0$

$$2x^* H(Px + q\xi) + \nu\xi r^* (Px + q\xi) + \tau(\xi - \mu_1 r^* x)(\mu_2 r^* x - \xi) \leq 0 \tag{1.73}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}$. En el mismo modo como fue hecho para $V(x) = x^* Hx$ podemos mostrar que $\tau = 0$ Por medio del teorema (1.18) con la forma hermitiana $\mathcal{G}(x, \xi) = \text{Re}\ [\nu\xi r^* (Px + q\xi)]$ tenemos que la desigualdad

$$\nu\text{Re}\ [i\omega\chi(i\omega)] \geq 0 \qquad (\omega \in \mathbb{R}, \det(P - i\omega I) \neq 0) \tag{1.74}$$

es necesaria y suficiente para la existencia de la matriz real $H = H^*$ satisfaciendo (1.73).

Así la desigualdad en el dominio de la frecuencia (1.74) es necesaria y suficiente para que el sistema (1.72) tenga una función Lyapunov del tipo “forma cuadrática mas la integral de la parte no lineal” en la clase $M[\mu_1, \mu_2]$.

Está claro que la condición necesaria del comportamiento tipo gradiente de (1.72) en la clase $M[\mu_1, \mu_2]$ es el hecho que la matriz P tenga $n - 1$ valores propios con parte real negativa. La última afirmación sigue de la controlabilidad de (P, q) y del hecho que $\varphi(\sigma) \equiv 0$ pertenece a $M[\mu_1, \mu_2]$.

Vamos a considerar la segunda forma canónica para (1.72)

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b\varphi(\sigma), \quad \varphi(\sigma + \Delta) = \varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= c^* z + \rho\varphi(\sigma). \end{aligned} \tag{1.75}$$

Como $\chi(p)$ es no degenerada, y $c^*(A_p I)^{-1}b \equiv p\chi(p) + \rho$, la pareja $(A; b)$ y (A, c) son controlable y observable respectivamente. Vamos a usar para (1.75) la función de Lyapunov

$$W(z, \sigma) = z^* Mz + \nu \int_0^\sigma \varphi(\sigma)\, d\sigma \tag{1.76}$$

donde M es una matriz $(n - 1) \times (n - 1)$ y $\nu \neq 0$ es un parámetro,

$$\dot{W}_{(1.75)}(z, \sigma) = 2z^* M(Az + b\varphi(\sigma)) + \nu\varphi(\sigma)(c^* z + \rho\varphi(\sigma)).$$

Por el Teorema (1.18) existe tal matriz M y un número ν con

$$2z^* M(Az + b\xi) + \nu\xi(c^* z + \rho\xi) \leq 0 \tag{1.77}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\xi \in \mathbb{R}$ si y solo si

$$\nu\text{Re}\ K(i\omega) \geq 0 \tag{1.78}$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$ con $\det(a - i\omega I) \neq 0$. Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa entonces la matriz M es definida positiva (ver Teorema (1.18)).

Considere ahora el caso cuando la derivada de $W(z, \sigma)$ con respecto al sistema (1.75) es definida negativa en la clase $M[\mu_1, \mu_2]$:

$$2z^*M(Az + b\xi) + \nu\xi(c^*z + \rho\xi) \leq -\epsilon \left|z\right|^2 \tag{1.79}$$

para todo $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\xi \in \mathbb{R}$ donde $\epsilon > 0$.

Vamos a considerar dos casos. Suponga primero que $\rho \neq 0$. Entonces aplicamos a (1.79) el teorema teo1.10.1 con

$$\mathcal{G}(x, \xi) = \nu\xi(c^*z + \rho\xi) + \epsilon \left|z\right|^2 .$$

Las condiciones necesarias y suficientes para (1.79) que deberá cumplirse tiene la forma

$$\nu \text{Re } K(i\omega) \geq \epsilon \left|(A - i\omega I)^{-1}b\right|^2 .$$

Como $\rho \neq 0$ la condición necesaria y suficiente de existencia de $M = M^*$ y $\epsilon > 0$ tal que se cumpla (1.79) tiene la forma

$$\nu \text{Re } K(i\omega) > 0 \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

Suponga $\rho = 0$. En este caso aplique el Teorema (1.20) el cual proporciona condiciones necesarias y suficientes para que $2z^*mAz$ sea definida negativa y $\nu\xi c^* + 2z^*mb\xi$ sea igual a 0:

$$\begin{gathered} \nu \text{Re } K(i\omega) > 0, \quad (\omega \in \mathbb{R}), \\ \nu \lim_{\omega \to 0} \omega^2 K(iw) > 0. \end{gathered} \tag{1.80}$$

Finalmente, las desigualdades (1.80) son condiciones necesarias y suficientes de existencia de la matriz $M = M^*$ y $\epsilon > 0$ tal que se cumple (1.79) (en el caso $\rho = 0$ la segunda desigualdad (1.80) se sigue automáticamente de la primera).

Vamos a considerar ahora el sistema de segundo orden

$$\frac{d\sigma}{dt} = \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = -a\eta - \sin\sigma + \gamma \tag{1.81}$$

la cual corresponde a la ecuación del péndulo matemático. Para este sistema $\rho = 0$, $K(p) = (p+a)^{-1}$ (consecuentemente Re $K(i\omega) = a/(\omega^2+a^2)$. Es claro que la desigualdad (1.80) en este caso es verdadera. Aquí

$$W(\eta, \sigma) = \eta^2 + 2\int_0^\sigma (\sin\theta - \gamma)\, d\theta.$$

Tenga en cuenta que la función $W(\eta,\sigma)$ no depende del parámetro a. Así que si logramos demostrar que (1.81) es estable para algún γ_0 y a_0 mediante la función $W(\eta,\sigma)$, podríamos demostrar que (1.81) es estable, para cualquier par γ_0 y a ($a > 0$). Pero es bien sabido [Tricomi 1933] que para cualquier $0 < \gamma < 1$ existe un número $\overline{a}(\gamma) > 0$ tal que (1.81) con $a = \overline{a}(\gamma)$ tiene soluciones circulares. Así llegamos a la conclusión de que es posible establecer el comportamiento tipo gradiente (1.81) por medio de $W(\eta,\sigma)$ y la desigualdad sólo $\dot{W}_{(1.81)} < 0$ (para todo $\eta \neq 0$). Esta situación es típica para los sistemas tipo péndulo.

1.3.2 Dicotomía de sistemas Tipo Péndulo. Comportamineto Tipo Gradiente de sistemas Tipo Péndulo con No linealidades teniendo valor medio cero

En esta sección consideraremos sistemas pendulares autónomos como

$$\dot{x} = Px + q\varphi(\sigma), \quad \sigma = r^*x, \quad det(P) = 0, \quad \varphi(\sigma+\Delta) = \varphi(\sigma), \quad \varphi(\sigma) \not\equiv 0. \tag{1.82}$$

Investigamos las propiedades de convergencia de sus soluciones por medio de funciones de Lyapunov construidas en secciones previas. El sistema (1.82) puede escribirse también en la forma

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Ax + b\varphi(\sigma), \quad \varphi(\sigma+\Delta) = \varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= c^*x + \rho\varphi(\sigma). \end{aligned}$$

Es claro que si la función $\varphi(\sigma)$ tiene ceros en el intervalo $[0,\Delta)$ entonces el conjunto de equilibrio de (1.75) es infinito. Al comienzo mostramos que cada equilibrio (z_{eq},σ_{eq}) de (1.75) satisface el sistema

$$Az_{eq} + b\varphi(\sigma_{eq}) = 0, \quad c^*z_{eq} + p\varphi(\sigma_{eq}) = 0$$

y que si $\chi(p)$ es no degenerada, el conjunto de equilibrio contiene al conjunto

$$\mathcal{E} = \{(z,\sigma) \mid z = 0, \varphi(\sigma) = 0\}.$$

En el caso en que $\det A \neq 0$ el conjunto $\mathcal{E}$ coincide con el conjunto de equilibrio.

Primero daremos para el sistema (1.82) un criterio dominio de frecuencia de dicotomía.

Podemos aplicar al sistema (1.82) el resultado de la sección (1.2.2). En realidad, el sistema (1.29) junto con la condición $\varphi(\sigma+\Delta) = \varphi(\sigma)$ es la segundo forma canónica de (1.82). Así que teniendo en cuenta que $K(p) = p\chi(p)$, obtenemos del teorema 1.32 las siguientes afirmaciones.

Teorema 1.48. *Suponga que la función de transferencia $\chi(p)$ de la parte lineal de* (1.82) *es no degenerada y no tiene polos imaginarios puros y además el polo cero de multiplicidad uno. Suponga también que*

$$Re[i\omega\chi(i\omega)] \neq 0 \quad \textit{para todo } \omega \in \mathbb{R} \;\; \textit{y} \;\; \lim_{\omega\to\infty} \omega^2 Re[i\omega\chi(i\omega)] \neq 0 \tag{1.83}$$

Entonces el sistema (1.82) *es cuasi dicotómico.*

Demostración. La desigualdad $Re[i\omega\chi(i\omega)] \neq 0$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$ implica que

$$\aleph \mathrm{Re}\ [K(i\omega)] > 0 \;\; \text{para todo} \;\; \omega \in \mathbb{R},$$

donde $\aleph$ es un número positivo o negativo. Puesto que $\chi(p)$ es una función regular racional y $\lim_{\omega\to\infty} \omega^2 ReK(i\omega) \neq 0$, deducimos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\aleph ReK(i\omega) - \varepsilon|K(i\omega)|^2 \geq 0 \;\; \text{para todo} \;\; \omega \in \mathbb{R}$$

Así la desigualdad dominio de frecuencia (1.31) se obtiene con $\tau = 0$. Así todas las condiciones del Teorema 1.32 se satisfacen y consecuentemente el sistema (1.82) es cuasi dicotómico. □

Teorema 1.49. *Suponga que todos los requerimientos del teorema 1.48 son ciertos y la función $\varphi(\sigma)$ tiene un número finito de ceros aislados en $[0, \Delta)$. Entonces* (1.82) *es dicotomía.*

Para establecer que el teorema es cierto es suficiente probar el siguiente lema.

Lema 1.50. *Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua Δ periódica con un número finito de ceros aislados en $[0, \Delta)$. Sea $\alpha : R_+ \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces la relación límite*

$$\psi(\alpha(t)) \to 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to +\infty$$

implica la relación límite

$$\alpha(t) \to \hat{\alpha} \quad \textit{con} \quad t \to +\infty$$

donde $\hat{\alpha}$ es un cero de la función ψ.

Esta prueba repite la prueba del lema 1.37 con

$$\mathcal{A} = \left\{ \alpha \mid \alpha \in \bigcup_k (\alpha_k - \Delta, \alpha_k + \delta),\;\; \alpha_k \in [0, \Delta)\,, \psi(\alpha_k) = 0 \right\}.$$

Teorema 1.51. *Si todos los requerimientos del teorema 1.48 son ciertos y la matriz P tiene $n-1$ valores propios con partes reales negativas, entonces, el sistema* (1.82) *es dicotomía.*

Esto se sigue inmediatamente del teorema 1.36.

Consideremos ahora el sistema (1.82) con valor medio cero de la no linealidad.

Teorema 1.52. *Suponga que las condiciones del teorema 1.51 son ciertas y que*

$$\int_0^{\Delta} \varphi(\sigma)\, d\sigma = 0, \tag{1.84}$$

donde Δ es un período de $\varphi(\sigma)$. Entonces el sistema (1.82) *es tipo gradiente.*

Demostración. Note que para $\varphi(\sigma) \equiv 0$ la conclusión del teorema es evidente. Supongamos ahora que $\varphi(\sigma) \not\equiv 0$. Consideremos la forma (1.75) del sistema (1.82). Debido a la hipótesis (1.83) para el sistema (1.75) existe una función Lyapunov $W(z, \sigma)$ del tipo (1.76) la cual satisface la desigualdad

$$\frac{d}{dt} W(z(t), \sigma(t)) \leq -\varepsilon |z(t)|^2 \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{1.85}$$

De acuerdo a la hipótesis del teorema, la matriz A es Hurwitzian. Entonces, puesto que $\varphi(\sigma)$ es acotada, se sigue de la primer ecuación de (1.75) que $z(t)$ es acotada sobre $[0, \infty)$ tal como $\dot{z}(t)$. Como $z(t)$ es acotado y (1.84) es cierta tenemos que $W(z(t), \sigma(t))$ es acotada en $[0, +\infty)$. Por otro lado tenemos de (1.85) que

$$W(z(t), \sigma(t)) - W(z(0), \sigma(0)) \leq -\varepsilon \int_0^t |z(t)|^2 dt,$$

se sigue que la integral $\int\limits_0^{+\infty} |z(t)|^2 dt$ converge. Este hecho junto con el acotamiento de $d[z^2(t)]/dt$ garantiza la existencia del límite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t |z(t)|^2 \frac{d}{dt} \left[|z(t)|^2 \right] dt = \frac{1}{2} \lim_{t \to +\infty} \left\{ |z(t)|^4 - |z(0)|^4 \right\}.$$

Así $|z(t)|^2$ tiene un límite finito cuando $t \to +\infty$. Entonces, la integral $\int_0^{+\infty} |z(t)|^2 dt$ converge y su limite es igual a cero. Con respecto al hecho de que $W(z(t), \sigma(t))$ es no creciente y acotada y $z(t)$ tiende a 0 cuando $t \to +\infty$ se sigue de (1.76) que

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^{\sigma(t)} \varphi(\sigma)\, d\sigma = \text{const.} \tag{1.86}$$

No es difícil demostrar que (1.86) implica que $\sigma(t)$ tiene un límite finito. En efecto, ya que de acuerdo con el teorema 1.51 el sistema (1.82) es dicotomía vamos a considerar solo funciones no acotadas $\sigma(t)$. Sean $\sigma^*, \sigma^{**} \in [0, \Delta)$ and $\varphi(\sigma^*) = 0$, $\varphi(\sigma^{**})$. Sea $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que $\varphi(\sigma)$ no cambia su signo en los intervalos $(\sigma^* - \delta_1, \sigma^*)$ y $(\sigma^{**}, \sigma^{**} + \delta_2)$ pero no es identicamente igual a cero sobre ellos.

Sea

$$\Gamma = \text{mín}\left\{\left|\int_{\sigma^{**}}^{\sigma^{**}+\delta_2} \varphi(\sigma)d\sigma\right|, \left|\int_{\sigma^*-\delta_1}^{\sigma^*} \varphi(\sigma)d\sigma\right|\right\}.$$

Puesto que $\sigma(t)$ no es acotado y $\varphi(\sigma)$ es Δ-periodica, podemos encontrar una sucesión de parejas $\left\{t_k^{(1)}, t_k^{(2)}\right\}$, $t_k^{(1)} < t_k^{(2)}$, $k = 1, \ldots$, tal que

$$\left|\int_{\sigma(t_k^{(1)})}^{\sigma(t_k^{(2)})} \varphi(\sigma)d\sigma\right| \geq \Gamma.$$

Por otro lado, se sigue de (1.86) que para cualquier t_1 and t_2 suficientemente grande

$$\left|\int_{\sigma(t_1)}^{\sigma(t_2)} \varphi(\sigma)d\sigma\right| < \Gamma.$$

Esta contradicción prueba que $\sigma(t)$ tiene un límite finito. □

1.3.3 Extensiones del criterio círculo. Conos invariantes

Consideremos un sistema tipo péndulo en la primera forma canónica

$$\dot{x} = Pz + q\xi, \qquad \sigma = r^*x, \qquad \xi = \varphi(t, \sigma), \tag{1.87}$$

donde P es una matriz constante $n \times n$, q y r son n vectores y $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y localmente Lipschitz continua en el segundo argumento,

$$\det p = 0, \tag{1.88}$$

$$\varphi(t, \sigma + \Delta) = \varphi(t, \sigma), \quad t \in \mathbb{R}_+,\ \sigma \neq 0 \tag{1.89}$$

Además asumimos que φ pertenece al sector $M[\mu_1, \mu_2]$, es decir,

$$\mu_1 \leq \frac{\varphi(t, \sigma)}{\sigma} \leq \mu_2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \sigma \neq 0 \tag{1.90}$$

donde μ_1 es bien un número o $-\infty$ y μ_2 es bien un número o $+\infty$. En el caso $\mu_1 = -\infty$ (resp. $\mu_2 = +\infty$) asumimos que $\mu_1^{-1} = 0$ (resp. $\mu_2^{-1} = 0$). Se sigue de (1.89) que o $\mu_1 < 0$ y $\mu_2 > 0$ ó $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Excluiremos el último caso de nuestras consideraciones.

Como es usual suponemos que $\chi(p) = r^*(P_pI)^{-1}q$ es no degenerada. Note primero que es imposible usar el Criterio Círculo estándar (Teorema 1.21) para el sistema (1.87)–(1.90). La condición del Teorema 1.21 no se satisfacen cuando la matriz P tiene al menos un valor propio con parte real cero. Esto no es sorprendente porque el criterio Círculo usa la existencia de una forma cuadrática x^*hx la cual tiene derivada negativa a lo largo de la solución de (1.87)–(1.90), y ya mostramos en la sección 1.3.1 que no existe tal forma cuadrática.

Vamos ahora a reemplazar la matriz P en (1.87) por $P + \lambda I$, donde $\lambda > 0$ es un cierto número. De la no degeneración de $\chi(p)$ se sigue que la pareja $(P+\lambda I, q)$ es controlable. Suponga que la desigualdad

$$\mathrm{Re}\,\{[\chi(i\omega - \lambda) + \mu_1^{-1}]^*[\chi(i\omega - \lambda) + \mu_2^{-1}]\} \leq 0 \tag{1.91}$$

es verdadera para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Por el Teorema 1.18 existe entonces una matriz Hermitiana $n \times n$ H tal que la forma cuadrática

$$G(x,\xi) = 2x^*H[(P+\lambda I)x + q\xi] + (\mu_2^{-1}\xi - r^* - r^*x)(\mu_1^{-1}\xi - r^*x) \quad (x \in \mathbb{C}^n, \xi \in \mathbb{C})$$

es no positiva. Vamos ahora a considerar la función de Lyapunov $V(x) = x^*Hx$. Sus derivadas con respecto al sistema (1.87) es

$$\dot{V}_{(1.87)} = 2x^*H(Px + q\xi).$$

donde $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ es la solución de (1.87). Usando la condición sector (1.90) y el hecho que G es no positiva, es decir,

$$2x^*H(Px + q\xi) \leq -2\lambda x^*Hx - (\mu_2^{-1}\xi - r^* - r^*x)(\mu_1^{-1}\xi - r^*x) \tag{1.92}$$

llegamos a la conclusión que

$$\frac{d}{dt} \leq -2\lambda v(t) \quad \text{para} \quad t \geq t_0. \tag{1.93}$$

Así con la ayuda del Criterio Círculo (1.91) hemos obtenido una nueva propiedad de la función de Lyapunov. Necesitamos la siguiente afirmación.

Lema 1.53. ([Gelig et al. 1978]) *Suponga que $v : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua, $v(t_0) \leq 0$ (resp. $v(t_0) < 0$) y existe un número γ tal que*

$$\frac{dv(t)}{dt} \leq \gamma v(t) \quad \textit{para a.e.} \quad t \geq t_0. \tag{1.94}$$

Entonces $v(t) \leq 0$ (resp. $v(t) < 0$) para todo $t \geq t_0$.

Demostración. Se sigue de (1.94) que para a.e. $t \geq t_0$ tenemos $e^{-\gamma t}\dot{v}(t) - \gamma e^{-\gamma t} v(t) \leq 0$ y consecuentemente, $d[e^{-\gamma t} v(t)]/dt \leq 0$ para a.e. $t \geq t_0$. Integrando la última desigualdad obtenemos $v(t) \leq e^{-\gamma(t-t_0)} v(t_0)$ para $t \geq t_0$, y la afirmación del lema se sigue inmediatamente. $\square$

Usaremos ahora una cierta notación geométrica conectada con la forma cuadrática $x^* H x$.

Definición 1.54. El conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es llamado un cono con el pico en x_0 si para cualquier $x_1 \in M$ la linea $\{x_0 + s(x_1 - x_0),\ s \in \mathbb{R}\}$ está completamente contenida en M. La dimensión del conjunto lineal maximal contenido en M es llamado la dimensión de M.

Note que si $H = H^*$ es una matriz $n \times n$, el conjunto $\{x \mid x^* H x \leq 0\}$ es obviamente un cono.

Definición 1.55. Un cono $\{x \mid x^* H x \leq 0\}$ con $H = H^*$ y $\det h \neq 0$ es llamado un cono cuadrático.

Es claro que para H teniendo k valores propios negativos y $(n-k)$ positivos, el conjunto $\{x \mid x^* H x \leq 0\}$ es un cono cuadrático $k-$dimensional. Ejemplos simples de conos cuadráticos son presentados en la Figura 1.4 y 1.5. Para el caso $n = 2$, el cono unidimensional $x_1^2 - x_2^2 \leq 0$ se muestra en la Figura 1.5. En la Figura 1.5 se ilustra el caso $n = 3$, en la Figura 1.5–a y 1.5–b se muestran los conos unidimensionales $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \leq 0$ y el cono $-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \leq 0$.

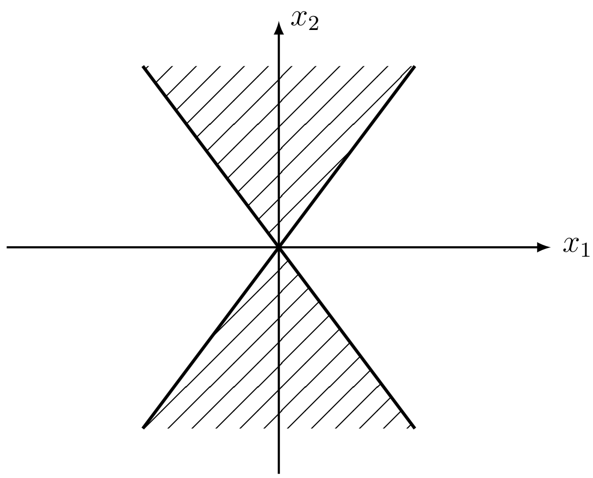

Figura 1.4: Caso $n = 2$: cono cuadrático uno-dimensional $x_1^2 - x_2^2 \leqslant 0$.

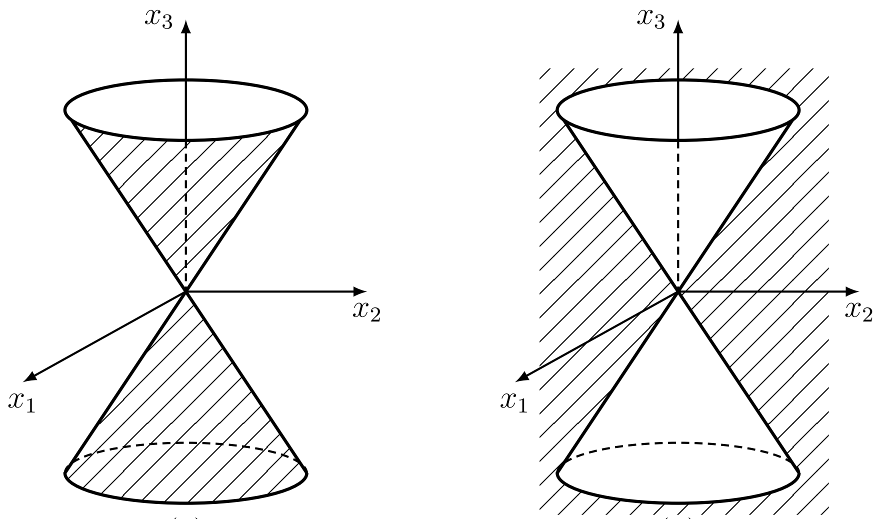

Figura 1.5: Caso $n = 3$: el cono uno dimensional $x_2^2 - x_3^2 \leqslant 0$ (a) y el cono dos dimensional $-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \leqslant 0$ (b).

Así para función Lyapunov $V(x) = x^* H x$ $(H = H^*)$ en caso $\det H \neq 0$ el conjunto $\{x \mid V(x) \leq 0\}$ es un cono cuadrático. Note que si una cierta función Lyapunov V tiene la propiedad (1.93), el conjunto $\{x \mid V(x) \leq 0\}$ es invariante positivo para el sistema (1.87). Necesitamos una afirmación auxiliar mas.

Lema 1.56. *(*[**Gelig et al. 1978**]**)** *Suponga P, $H = H^*$ y r son matrices de orden $n \times n$, $n \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Suponga también que la pareja (P, r) es observable y*

$$x^*(HP + P^*H)x \leq -\left|r^* x\right|^2 \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{C}^n. \tag{1.95}$$

Entonces la matriz P no tiene valores propios imaginarios puros, también $\det H \neq 0$ y el número de valores propios positivos de H coinciden con el número de valores propios de P con parte real negativa.

En el próximo teorema daremos una condición dominio de frecuencia de acotamiento de todas las soluciones de (1.87) el cual es obtenido con la ayuda de una nueva propiedad de funciones Lyapunov.

Teorema 1.57 (Leonov 1974)**.** *Suponga que existe un número $\lambda > 0$ tal que las siguientes condiciones para el sistema* (1.87) *se cumplen.*

(a) La matriz $P + \lambda I$ tiene $n - 1$ valores propios con parte real negativa;

(b)
$$\mu_1^{-1}\mu_2^{-1} + \left(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}\right) Re\chi(i\omega - \lambda) + |\chi(i\omega - \lambda)|^2 \leqslant 0 \qquad \forall\omega \in \mathbb{R} \tag{1.96}$$

entonces el sistema (1.87) *es estable Lagrange.*

Demostración. Supongamos $x(t, t_0, x_0)$ es una solución de (1.87). Sea d un vector propio de P correspondiente a su valor propio cero, tal que $r^*d = \Delta$. Puesto que (1.87) es tipo péndulo con respecto a $\Gamma = \{jd, j \in \mathbb{Z}, d \neq 0\}$ se sigue que

$$x(t, t_0, x_0) - jd = x(t, t_0, x_0 - jd), \quad t \geqslant t_0, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{1.97}$$

La condición en el dominio de la frecuencia (1.96) coincide con la desigualdad (1.91). Como ya se ha demostrado, (1.96) garantiza que la forma cuadrática

$$G(x, \xi) = 2x^*H[(P + \lambda I)x + q\xi] + \left(\mu_0^{-1}\xi - r^*x\right)\left(\mu_1^{-1}\xi - r^*x\right)$$

definida al comienzo de la sección es no positiva para una cierta matriz $H = H^*$ y así el conjunto $\{x \mid x^*Hx > 0\}$ es positivamente invariante para (1.87). Por lo tanto el interior

$$\Omega_j := \{x \mid (x - jd)^*H(x - jd) < 0\}$$

de un cono cuadrático $\{x \mid (x - jd)^*H(x - jd) \leqslant 0\}$ es invariante positivamente para (1.87). En efecto, para un $x_0 \in \Omega_j$ arbitrario se sigue que $x_0 - jd \in \Omega_0$. Entonces en virtud de la invarianza positiva de Ω_0 tenemos

$$x(t, t_0, x_0 - jd) \in \Omega_0 \qquad (\forall t \leqslant t_0, t_0 \in \mathbb{R}).$$

Debido a que (1.97) tenemos que

$$[x(t, t_0, x_0) - jd]^* H[x(t, t_0, x_0) - jd] < 0 \qquad (\forall \geqslant t_0, t_0 \in \mathbb{R}).$$

Puesto que $G(x, \xi)$ es no positiva para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}$, obtenemos tomando en (1.92) $\xi = 0$

$$2x^*H[P + \lambda I]x \leqslant -x(r^*x)^2.$$

Note que como $\chi(p)$ es no degenerada la pareja $(P + \lambda I, r)$ es observable. Entonces se sigue del lema (1.56) que H tiene un valor propio negativo y $n - 1$ valores propios positivos.

Consideremos ahora $x = d$, $\xi = 0$ en (1.92). Vemos que

$$d^*Hd < 0. \tag{1.98}$$

Definamos para un arbitrario $j \in \mathbb{Z}$ el conjunto

$$\Gamma_j := \Omega_j \cap \Omega_{-j}.$$

El conjunto Γ_j es invariante positivo como también Ω_j y Ω_{-j} son invariantes positivos.

Notemos que debido a que el espectro de H existe un vector $h \neq 0$ tal que

$$\{x \mid h^* x = 0, x \neq 0\} \subset \{x^* H x > 0\}. \tag{1.99}$$

En efecto, es suficiente reducir H a la forma $H = diag(I_{n-1}. - I)$ por medio de una transformación lineal no singular y reemplazar $h^* = (0, \ldots, 0, 1)$ en este caso. De (1.98) y (1.99) se sigue que $h^* d \neq 0$. En efecto, suponga lo contrario, que $h^* d = 0$. Entonces en virtud de (1.99) $d^* H d > 0$ lo cual contradice (1.98).

Considere la solución arbitraria $x(t, t_0, x_0)$. Es claro que puesto que $h^* d \neq 0$ y $d^* H d < 0$ podemos encontrar un número j suficientemente grande, tal que

$$\begin{gathered} |h^* x_0| < j |h^* d|, \\ x_0^* H x_0 + 2 j x_0^* H d + j^2 d^* H d < 0, \\ x_0^* H x_0 - 2 j x_0^* H d + j^2 d^* H d < 0. \end{gathered} \tag{1.100}$$

De lo anterior se sigue que

$$x(t, t_0, x_0) \in \Gamma_j \qquad \text{for all} \ \ t \geqslant t_0. \tag{1.101}$$

Vamos a mostrar que

$$|h^* x(t, t_0, x_0)| < j |h^* d| \quad \text{for all} \ \ t \geqslant t_0. \tag{1.102}$$

En efecto si (1.102) no se cumple podría existir un $\bar{t} > t_0$ tal que $|h^* x(\bar{t}, t_0, x_0)| = j |h^* d|$. Esto podría significar que o $(x(\bar{t}, t_0, x_0) + jd)^* H (x(\bar{t}, t_0, x_0) + jd) \geqslant 0$ o $(x(\bar{t}, t_0, x_0) - jd)^* H (x(\bar{t}, t_0, x_0) - jd) \geqslant 0$ lo cual es imposible a causa de (1.101).

Ahora podemos mostrar el acotamiento de $x(t, t_0, x_0)$. Se sigue de (1.99) que la matriz H puede ser representada en la forma $H = M - \tau h h^*$ con una matriz M definida positiva y un número positivo τ. Sea ε un número positivo tal que $M > \varepsilon I_n$. Para una solución $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ que satisface (1.101) y (1.102) es verdad que

$$\begin{aligned} \varepsilon |x(t) - jd|^2 &\leqslant (x(t) - jd)^* M (x(t) - jd) \\ &= (x(t) - jd)^* H (x(t) - jd) + \tau |h^*(x(t) - jd)|^2 \\ &< \tau \left[2(h^* x)^2 + 2 j^2 (h^* d) \right]^2 \end{aligned}$$

$$\leqslant 4\tau j^2 \left(h^* d\right)^2$$

para todo $t \geqslant t_0$, lo cual significa que $x(t, t_0, x_0)$ es acotado sobre $[t_0, +\infty)$. Esto prueba el Teorema. $\square$

Observación 1.3.2. *La desigualdad dominio de frecuencia* (1.96) *permite una interpretación geométrica simple. Sea $-p_0 < 0$ la parte real maximal de las partes reales de todos los polos no ceros de $\chi(p)$. La desigualdad* (1.96) *significa que para $\lambda \in (0, p_0)$ la hodógrafa de la frecuencia respuesta $\omega \longmapsto \chi(i\omega - \lambda)$ se encuentra en el plano complejo en el interior del círculo con centro el eje real y el cual pasa por los puntos $\left(-\mu_1^{-1}, 0\right)$, $\left(-\mu_2^{-1}, 0\right)$,*

Observación 1.3.3. *El teorema 1.57 junto con el criterio dicotomía da condiciones suficientes para el comportamiento tipo gradiente.*

Observación 1.3.4. *Note que en el proceso de la prueba del teorema 1.57 hemos construido una red consistente de las fronteras de los conjuntos Ω_j. Para el caso $n = 2$ la disposición de la red en $\mathbb{R}^n$ es mostrada en la figura 1.6. El campo vectorial de* (1.87) *con respecto a las fronteras de Ω_j es mostrado por las flechas. La prueba del teorema se basa en el hecho que cualquier punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se encuentra en una celda de algunos de la red y la curva integral $x(t, t_0, x_0)$ $(t \geqslant t_0)$ puede estar dispuesta sólo en un número finito de celdas. Esto es claro de la estructura del campo de vector.*

Vamos a llamar al método descrito aquí el método de conos invariantes. Este fue presentado primeramente en [Lenov 1974[52]] y desarrollado en los artículos [Lenov & Churilov 1976[54], Lenov & Churilov 1982[55]]. Independientemente el método fue usado en [Noldus 1977 [61]].

En el resto de esta sección presentamos varios ejemplos de sistemas electromagnéticos y mecánicos concretos, la dinámica de los cuales esta descrita por medio del sistema (1.87)–(1.90). El Teorema 1.57 da la oportunidad de obtener regiones de estabilidad Lagrange en el espacio de parámetros de esos sistemas.

Ejemplo 1.58. Considere los sistemas (1.87) (2.6.4) con $n = 2$ y la función de transferencia

$$\chi(p) = \frac{1}{p(p+\alpha)} \tag{1.103}$$

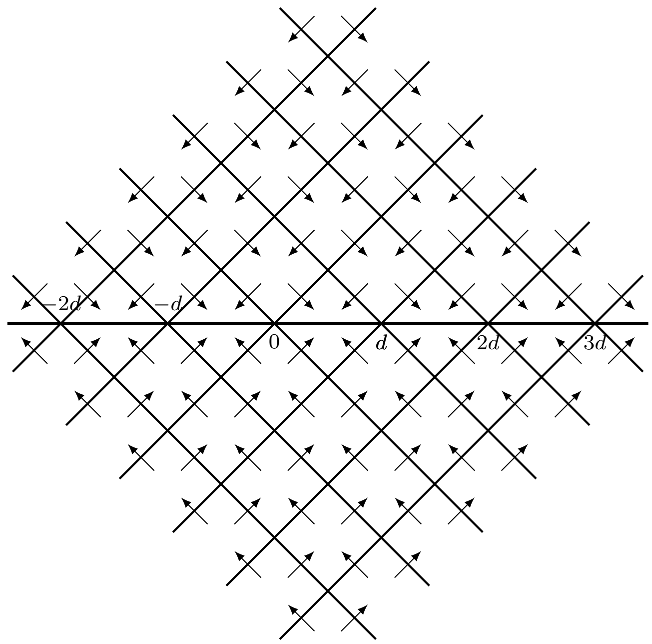

Figura 1.6: La disposición de la red en la prueba del Teorema (1.57) (caso n=2).

donde $\alpha > 0$ es un parámetro. El sistema bajo consideración es equivalente a la ecuación de segundo orden

$$\ddot{\sigma} + \alpha\dot{\sigma} + \varphi(t, \sigma) = 0. \tag{1.104}$$

Asumamos que φ satisface la condición

$$\varphi(t, \sigma)\sigma < \mu\sigma^2 \quad \text{para todo} \ \ t \in \mathbb{R}_+, \ \sigma \neq 0 \tag{1.105}$$

donde μ es un número positivo $\left(\mu_1^{-1} = 0, \mu_2 = \mu\right)$.

La desigualdad dominio de frecuencia (1.96) tiene aquí la forma

$$-\omega^2 + \lambda^2 - \alpha\lambda + \mu \leqslant 0 \quad \text{para todo} \ \ \omega \in \mathbb{R}.$$

La hipótesis (i) del teorema es cierta para $\lambda \in (0, \alpha)$. Así las hipótesis del teorema son válidas si y solamente si

$$\alpha^2 \geqslant 4\mu. \tag{1.106}$$

Ejemplo 1.59. Sea $\varphi(t, \sigma) = \beta \sin \omega_0 t \sin \sigma$ donde β y ω_0 son parámetros y considere los sistemas (1.87)–(1.89) con la función de transferencia (1.103). Este sistema describe el movimiento de un péndulo con un punto de suspensión vibrando [Mitropol'skij 1971].

La ecuación de la situación es:

$$\ddot{\sigma} + \alpha\dot{\sigma} + \frac{g - a\omega_0^2 \sin \omega_0 t}{t} \sin \sigma = 0$$

Así $g = 0$, $\beta = -\frac{(a\omega_0^2)}{l}$. El sistema bajo consideración describe también el efecto hula–hoop [Caughey 1960] y el movimiento de un rotor el cual es colocado en la base con vibración senosoidal [Panovko & Gubanova 1979]. Del ejemplo (1.58) se sigue que la desigualdad

$$\alpha^2 \geqslant 4|\beta| \tag{1.107}$$

es suficiente para la estabilidad de Lagrange del sistema dado.

Comparemos la condición (1.107) con cierto resultado el cual ha sido presentado por otros autores. En [Mitropol'skij 1971] se muestra que para

$$a\alpha l < a\omega_0 \quad \text{y} \quad a \ll l \tag{1.108}$$

en el sistema del ejemplo (1.59) existe una solución circular (vea definición (1.46)). En [Caughey 1960] con la ayuda de un método de aproximación, la condición para la existencia de soluciones circulares en el sistema bajo consideración, está dada por

$$\alpha \ll l, \quad a\omega_0^2 \leqslant 2l, \quad 2\alpha l < a\omega_0 \tag{1.109}$$

Es claro que (1.109) contradice (1.107) cuando

$$2\omega_0\sqrt{\frac{a}{l}} < \alpha < \omega_0\frac{a}{2l} \tag{1.110}$$

En este caso (1.109) y (1.107) son ciertas lo cual es imposible porque las soluciones circulares no están acotadas.

Note que (1.108) no contradice a (1.107) porque $a \ll l$ y así las desigualdades en (1.110) no se pueden satisfacer. Note también que esto puede usarse para establecer condiciones de suficiencia para la estabilidad de Lagrange del tipo (1.108) por el método de conos invariantes.

Ejemplo 1.60. Consideremos la ecuación que describe el trabajo de un motor una–fase sincrónico (motor sincrónico monofásico) con pulso de momentos vibrando [Morary 1970]

$$\ddot{\eta} + \alpha\dot{\eta} + \beta \cos t \cos \eta + \gamma \sin 2\eta + \delta \cos 2t \sin 2\eta = 0 \tag{1.111}$$

donde $\alpha > 0$, β, γ son números. Con la ayuda del cambio de variables $\sigma = \eta + \frac{\pi}{2}$ obtenemos

$$\ddot{\sigma} + \alpha\dot{\sigma} + \varphi(t, \sigma) = 0,$$

donde

$$\varphi(t,\sigma) = \beta \cos t \sin \sigma - \gamma \sin 2\sigma - \delta \cos 2t \sin 2\sigma.$$

Del ejemplo 1.58 establecimos para (1.111) la siguiente condición de la estabilidad de Lagrange

$$\alpha^2 \geqslant 4(|\beta| + 2|\gamma| + 2|\delta|).$$

Ejemplo 1.61. Considere el sistema (1.87) con

$$\varphi(t,\sigma) \equiv \varphi(\sigma) \tag{1.112}$$

($\varphi(\sigma)$ es una función Δ periódica) y la función de transferencia (1.103). Es claro que todas la hipótesis del teorema (1.49) aquí se satisfacen. Así los sistemas (1.87), (1.112) y (1.103) son dicotomía. Se sigue del teorema 1.57 y del ejemplo 1.58 que la condición (1.106) es una condición suficiente de comportamiento tipo gradiente de este sistema para algún φ que satisface la condición del sector

$$\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \mu, \quad \varphi \neq 0$$

Ejemplo 1.62. Consideremos los sistemas (1.87)–(1.90) con $n = 3$ y la función de transferencia

$$\chi(p) = \frac{1}{p\left(p^2 + \alpha p + \beta\right)} \tag{1.113}$$

donde α y β son parámetros positivos. Entonces

$$\det[(p-\lambda)I + P] = (p-\lambda)\left[p^2 + (\alpha - 2\lambda)p + \lambda^2 - \alpha\lambda + \beta\right]$$

La condición (i) del teorema 1.57 toma la forma

$$\alpha - 2\lambda > 0, \quad \lambda^2 - \alpha\lambda + \beta > 0 \tag{1.114}$$

La condición (ii) del teorema 1.57 con $\mu_1 = -\infty$ es como sigue

$$(3\lambda - \alpha)\omega^2 - \lambda\left(\lambda^2 - \lambda\alpha + \beta\right) + \mu_2 \leqslant 0 \tag{1.115}$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Si $\alpha^2 \leqslant 3\beta$ entonces las desigualdades (1.114), (1.115) se satisfacen para

$$\lambda = \frac{\alpha}{3}, \quad \mu_2 \leqslant \frac{\alpha}{3}\left(\beta - \frac{2}{9}\alpha^2\right).$$

Si $\alpha^2 \geqslant 3\beta$ es evidente que las desigualdades (1.114), (1.115) se satisfacen para

$$\lambda = \frac{\alpha}{3} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{9} - \frac{\beta}{3}},$$

$$\mu_2 \leqslant \frac{\alpha}{3}\left(\beta - \frac{2}{9}\alpha^2\right) + 2\left(\frac{\alpha^2}{9} - \frac{\beta}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Así si $\mu_1 = -\infty$ y

$$\mu_2 \leqslant \begin{cases} \dfrac{\alpha}{3}\left(\beta - \dfrac{2}{9}\alpha^2\right) & \text{for } \ \alpha^2 \leqslant 3\beta, \\ \dfrac{\alpha}{3}\left(\beta - \dfrac{2}{9}\alpha^2\right) + 2\left(\dfrac{\alpha^2}{9} - \dfrac{\beta}{3}\right) & \text{for } \ \alpha^2 \geqslant 3\beta, \end{cases} \tag{1.116}$$

el sistema (1.87)–(1.90), (1.113) es estable Lagrange.

Consideremos ahora la función

$$\varphi(t, \sigma) = \sin(\sigma - \sigma_0) - \sin\sigma_0$$

con $\sigma_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\sin\sigma_0 \leqslant 0.99$. Esta satisface (1.90) con $\mu_1 = -\infty$ y

$$\mu_1 \geqslant \frac{1 + \sin\sigma_0}{\sqrt{2} - 1 + 0.25\pi + \sigma_0}.$$

En este caso la desigualdad (1.116) toma la forma

$$\frac{1 + \sin\sigma_0}{\sqrt{2} - 1 + 0.25\pi + \sigma_0} \geqslant \begin{cases} \frac{\alpha}{3}\left(\beta - \frac{2}{9}\alpha^2\right) & \text{para } \ \alpha^2 \leqslant 3\beta, \\ \frac{\alpha}{3}\left(\beta - \frac{2}{9}\alpha^2\right) + 2\left(\frac{\alpha^2}{9} - \frac{\beta}{3}\right)^{\frac{3}{2}} & \text{para } \ \alpha^2 \geqslant 3\beta. \end{cases} \tag{1.117}$$

En la figura 1.7 se muestra la frontera de la región Lagrange estable sobre el plano $\{\alpha, \beta\}$ obtenido por (1.117). Se cosideraron los casos $\sin\sigma_0 = 0, 0.1, 0.2, 0.3$. Se muestra, para el caso $\sin\sigma_0 = 0$, la frontera de la región donde el punto de equilibrio es Lyapunov estable.

Vemos que algunas veces el Teorema 1.57 da la oportunidad de establecer la estabilidad Lagrange de sistemas autónomos los cuales son inestables en el sentido de Lyapunov.

Vamos a suponer ahora que $\varphi(t, \sigma) = \varphi(\sigma)$, function φ es diferenciable y

$$\varphi'(\sigma) \leqslant \nu_1 < \alpha\beta \quad \text{para todo } \ \sigma \in \mathbb{R} \tag{1.118}$$

donde ν_1 es un cierto número positivo. Tal sistema describe la dinámica de un sistema autónomo.

Demostramos que el sistema (1.87) con la no linealidad estacionaria y función de transferencia (1.113) es dicotómico bajo la condición (1.118). Para este propósito es suficiente verificar que la desigualdad dominio de frecuencia (1.31) se cumple. En nuestro caso $\mu_1 = \nu_1$ y μ_1 pueden ser elegidos negativos con valor absoluto tan grande como deseamos.

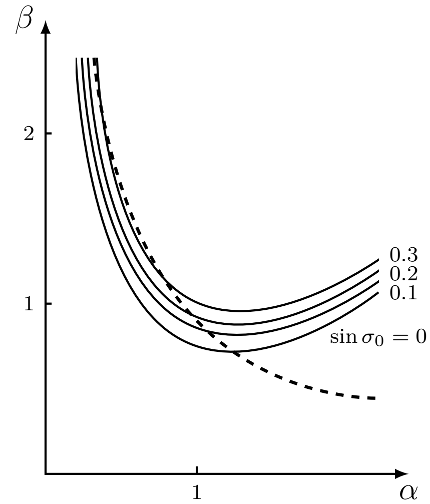

Figura 1.7: La frontera de regiones de estabilidad Lagrange sobre el plano $\{\alpha, \beta\}$ obtenido por (1.117).

Para este caso es suficiente demostrar que para cierto $\tau \geqslant 0$ y todo $\omega > 0$ la siguiente desigualdad

$$Re\left\{-\tau\omega^2|\chi(i\omega)|^2 + \left(i\omega - \tau\nu_1^{-1}\omega^2\right)\chi(i\omega)\right\} > 0$$

se cumple. (En efecto, podemos dividir (1.31) en $|\mu_1\mu_2|$ y tomar $\aleph = |\mu_1\mu_2|$. Entonces teniendo en cuenta que ε y μ_1^{-1} pueden ser elegido tan pequeño como deseamos). Así la desigualdad dominio de frecuencia toma la forma

$$-\frac{\tau}{\left(-\omega^2+\beta\right)^2+\alpha^2} + Re\frac{1+i\tau\nu_1^{-1}\omega}{-\omega^2+\beta+\alpha i\omega} > 0$$

o

$$-\frac{\tau}{\left(-\omega^2+\beta\right)^2+\alpha^2} + \frac{-\omega^2+\beta+\tau\nu_1^{-1}\alpha\omega^2}{\left(-\omega^2+\beta\right)^2+\alpha^2} > 0.$$

La última desigualdad es verdadera para todo $\omega > 0$ si

$$\alpha\tau\nu_1^{-1} > 1 \quad \text{and} \quad \beta > \tau.$$

Así elegimos $\frac{\nu_1}{\alpha} < \tau < \beta$. Esto es posible a causa de (1.118). Así las condiciones (1.117) dan condiciones del comportamiento tipo gradiente del sistema.

CAPÍTULO 2

DICOTOMÍA DE SISTEMAS TIPO PÉNDULO DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO–LINEALES DE TERCER ORDEN

En esta sección se dan las condiciones para la existencia de la dicotomía de soluciones de un tipo péndulo particular de ecuaciones diferenciales de tercer orden no-lineal, con múltiples equilibrios utilizando el criterio de dominio de frecuencia. Damos un ejemplo.

2.1 Introducción

En un trabajo anterior, ([3]), fue introducido una generalización del problema Barbashian-Ezeilo con una no-linealidad periódica de la forma

$$\dddot{x} + \alpha\ddot{x} + g(\dot{x}) + c\sin x(t) = p(t) \tag{2.1}$$

El sistema no-lineal tipo péndulo con múltiples equilibrios se ha utilizado para explicar muchos de los problemas de la mecánica, ingeniería, sistemas biológicos, etc... Se han realizado en los últimos años investigaciones de estos, especialmente porque ellos no coinciden con las propiedades de los sistemas regulares con un solo punto de equilibrio para los cuales las herramientas matemáticas son aplicables, (cf. Duan et al, 2007, Leonov et al, 1996, Wang et al, 2004, 2007).

Recientemente ha habido un interés en el estudio de los sistemas tipo péndulo no-lineales con no-linealidad periódica y con múltiples equilibrios. Con la existencia de sistemas tipo péndulo se tienen las diferentes propiedades globales de las soluciones. Algunas de estas incluyen estabilidad de Lagrange, la dicotomía y el comportamiento tipo gradiente. Muchas trabajos se vienen publicando que relacionan las propiedades de dicotomía y de tipo gradiente de sistemas de ecuaciones, (Duan et al, 2007, Wang et al, 2004, 2007) y los libros (Wang et al., 2009 y Leonov et al, 1996).

Algunas peculiaridades de los sistemas tipo péndulo son la noción de los ciclos de primera clase y los ciclos de segunda clase (Lu et al., 2008). El método de dominio de frecuencia se utiliza para garantizar la existencia de ciclos de la segunda clase (cf Leonov et al., 1996a, 1996b). Por esto el lema de Kalman-Yacubovich-Popov (KYP) es utilizado como un resultado fundamental para la pruebas. Una forma generalizada de este KYP relaciona a los sistema de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + B\varphi(y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Cx + D\varphi(y) \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\varphi(y) = (\varphi_1(y_1), \varphi_2(y_2), \cdots, \varphi_m(y_m))^t, C \in \mathbb{R}^{m\times n}, D \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

La función matriz de transferencia de entrada $\varphi(y)$ a la salida $\frac{dy}{dt}$ se establece como

$$K(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

2.2 Preliminares

Asumamos que en el sistema (2.2) la matriz A no tiene valores propios imaginarios, (A, B) es controlable, (A, C) observable y $K(0)$ es no-singular (es decir $D \neq CA^{-1}B$). Además, asumamos que $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Δ_i - periódica, localmente Lipschitz continua y que tiene un número finito de ceros sobre $[0, \Delta_i)$, $\quad (i = 1, \cdots, m)$. Sea

$$\theta_i \leq \frac{d\varphi_i}{dt} \leq \lambda_i$$

con $-\infty < \theta_i, \lambda_i < +\infty, (i = 1, 2, \cdots, m)$ y

$$\Theta = diag(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m), \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m).$$

Entonces, tenemos el lema KYP generalizado en lo que se refiere a sistemas con dicotomía:

Teorema 2.1. *Si existen matrices diagonales con P, y R con $R \geq 0$, y un escalar $\epsilon > 0$ tal que la siguiente desigualdad dominio-frecuencia se cumple*

$$Re\left\{PK(i\omega) - (i\omega I - \Theta K(i\omega))^H R(i\omega I - \Lambda K(i\omega))\right\} + \epsilon K^H(i\omega)K(i\omega) \leq 0 \tag{2.3}$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$, entonces el sistema (2.2) es dicotomía.

[1]

Observación 2.2.1. *Si* $R \equiv 0$, *la desigualdad (2.3) se convierte en*

$$Re\{PK(i\omega)\} + \epsilon K^H(i\omega)K(i\omega) \leq 0 \tag{2.4}$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

2.3 Resultado principal

Consideremos la ecuación de la forma:

$$\dddot{x} + \alpha\ddot{x} + g(x)\dot{x} + \varphi(x) = 0 \tag{2.5}$$

donde $\alpha > 0$, $g(x)$ es una función continua acotada en $\mathbb{R}$, $\varphi(x)$ es una función impar, continuamente diferenciable, periódica con período 2π in $\mathbb{R}$. Además, asumamos que si $\mathbb{R}$ es segmentado como una unión de Π_k donde

$$\Pi_k = \{x|[2k\pi, 2(k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}\}, \tag{2.6}$$

$\varphi(x)$ tiene dos ceros x_1, x_2, $(x_1 < x_2)$, en cada segmento $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$ con $\varphi'(x_1) > 0$ y $\varphi'(x_2) < 0$.

Haremos los siguientes supuestos básicos sobre (2.5)

(H_1) $\varphi(x)$ es una función 2π-periódica que tiene dos ceros $0, x_0$ en $[0, 2\pi)$ y que φ es continuamente diferenciable con $\varphi'(0) > 0$ y $\varphi'(x_0) < 0$, y que

$$\varphi^2(x) + [\varphi'^2](x) \neq 0;$$

para cualquier $x \in [0, 2\pi)$;

y la segmentación de $\mathbb{R}$ será como

(H_2) $\Pi_k \equiv \{[2k\pi, 2(k+1)\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$ con $\varphi(x)$ teniendo dos ceros $2k\pi$, y $(x_0 + 2k\pi)$ en cada segmento de Π_k of $\mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$;

y

[1] Notemos que $Re\{Y\} = \frac{1}{2}(Y + Y^H)$ donde Y es una matriz cuadrada compleja, y Y^H es su transpuesta conjugada compleja.

(H_3) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y acotada en $\mathbb{R}$, con

$$G(x) = \int_0^x g(s)ds = \beta x + \hat{g}(x),$$

donde β es una constante positiva.

Nuestro principal resultado sobre la ecuación de la forma (2.5) es el siguiente:

Teorema 2.2. *supongamos que*

(i) existen números positivos β y μ tal que

$$\beta \leq \frac{G(x)}{x} \leq \beta + \mu, \ (x \neq 0),$$

con $\alpha^2 > 4\beta$ y algún parámetro constante λ_1; satisfaciendo $\mu < \lambda_1(\lambda_1^2 - \alpha\lambda_1 + \beta)$;

(ii) $\varphi(x)$ satisface las hipótesis (H_1) y (H_2).

(iii) Supongamos también que para algún $\lambda_2 > 0$, tenemos

$$\alpha - \sqrt{(\alpha^2 - 4\beta)} < 2\lambda_2 < \alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 4\beta)},$$

y $\varphi'(\sigma_0) > \alpha\beta$,

entonces la ecuación (2.5) es acotadamente estable y tiene una solución periódica no-trivial en cada segmento

$$\Pi_k = \{[2k\pi, 2(k+1)\pi) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Además, si $\alpha \geq 1$, y $\varphi'(\bar{x}) \neq 0$ en cualquier cero $\bar{x}$ of $\varphi(x)$, y $|\varphi'(\bar{x})| < \mu$ para algún $\mu > 0$, para todo $x \in I\!R$, entonces la ecuación (2.5) es dicotómica.

Prueba del Teorema 2.2: La primera parte fue probado en (Afuwape, Castellanos, 2007). Lo que queda por demostrar es que el sistema acotado es convergente hacía un punto de equilibrio. Esto se hace mediante el establecimiento de matrices apropiadas A, B, C, D, como en el sistema (2.2), para que la desigualdad diminio-frecuencia (2.3) se satisfaga.

Sea $G(x) = \int_0^x g(s)ds = \beta x + \hat{g}(x)$.

Con el fin de escribir (2.5) en forma de un sistema equivalente de (2.2),

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + B\varphi(\sigma) \\ \dfrac{d\sigma}{dt} = Cx + D\varphi(\sigma) \\ \end{cases}$$

hacemos

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \, D \equiv 0 \text{ y } \varphi(\sigma) = [\hat{g}(x_1) + \varphi(x_1)].$$

Siguiendo a [Afuwape, 2006], la función de transferencia es

$$K(i\omega) = \frac{\beta[(\beta - \omega^2) - i\omega\alpha]}{[(\beta - \omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2]}.$$

Por lo tanto

$$K^H(i\omega)K(i\omega) = \frac{\beta^2}{[(\beta - \omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2]}$$

Haciendo $P = -\mu; R = 0; \varepsilon > 0$, entonces la desigualdad (2.4) se convierte

$$\pi(\omega) \equiv \frac{\beta^2(\varepsilon - \mu) + \mu\beta\omega^2}{[(\beta - \omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2]} \leq 0.$$

Esto será cierto para todo $\omega \in \mathbb{R}$, if $\varepsilon < \mu$.

Para este caso entonces la desigualdad (2.4) será valida, note que $0 \leq \varphi'(x) \leq \mu$.

Si $R \not\equiv 0$ en (2.3) entonces haciendo $\Theta \equiv 0, \Lambda = \mu, P = -\mu, R = \delta > 0$ después de un sencillo cálculo, encontramos que

$$\pi(\omega) = \frac{(\varepsilon - \mu)\beta^2}{[(\beta - \omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2]} - \omega^2 \left[\delta + \frac{\mu\beta(-1 + \alpha\delta)}{[(\beta - \omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2]}\right] \leq 0$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

De nuevo, se verifica (2.3) si elegimos $\alpha\delta - 1 > 0$, $0 < \varepsilon \leq \mu$;

Si elegimos $\Theta = -\Lambda$ con $\Lambda \not\equiv 0$, entonces para caso particular cuando $\Lambda = \mu, P = -\mu, R = \delta > 0$, tenemos que la desigualdad (2.3) al simplificarse queda como

$$\pi(\omega) = \frac{\beta^2(\varepsilon - \mu + \mu^2\delta)}{[(\beta - \omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2]} - \omega^2 \left(\delta - \frac{\mu\beta}{[(\beta - \omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2]}\right).$$

la cual es menor o igual a cero, para todo $\omega \in \mathbb{R}$, if $(\varepsilon - \mu + \mu^2\delta) \leq 0$, for $\varepsilon > 0, \delta > 0$. Entonces, esto conduce a las condiciones: $1 > 4\delta\varepsilon$ and $\frac{1-\sqrt{1-4\delta\varepsilon}}{2\delta} < \mu < \frac{1+\sqrt{1-4\delta\varepsilon}}{2\delta}$.

2.3.1 Observaciones

Para el caso particular de (2.5) con $g(x) = \cos x$, $\varphi(x) = \sin x$, tenemos

Corolario 2.3. *La ecuación*

$$\dddot{x} + \alpha\ddot{x} + (\cos x)\dot{x} + \sin x = 0 \tag{2.7}$$

es dicotómica cuando $\alpha \geq 1$.

Asimismo, para el caso particular cuando $\varphi(x) = \sin(x+\tilde{x}) - \sin\tilde{x}$, para $\tilde{x}$ una constante, con $\tilde{x} \in (0, \pi/2)$, entonces se cumple el Teorema de Haye modificado (Leonov et al., 1996a), es decir:

Corolario 2.4. *La ecuación (2.5) con* $\varphi(x) = \sin(x+\tilde{x}) - \sin\tilde{x}$, *es dicotómico, si* $\tilde{x} \in (0, \pi/2)$, *y*

$$1 > \alpha\beta > \sin(\tilde{x}/2),$$

con la hipótesis (i) del teorema 2.2 satisfecha.

2.3.2 Ejemplo

Podemos considerar el siguiente ejemplo en forma de sistema de (2.2)

$$A = \begin{pmatrix} -0.4 & 3 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1.4 & 1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ D = -0.5\begin{pmatrix} \alpha & 1.2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

y con $\varphi_1(y_1) = \sin(y_1) - 0.2, \varphi_2(y_2) = \sin(2y_2) - 0.1$.

La realización de los cálculos para la desigualdad dominio-frecuencia (2.3), muestra claramente que el sistema es dicotómica cuando $\alpha \geq 1.9$.

Observación: Finalmente notemos que una forma de la ecuación (2.5) fue discutida para disipatividad en Afuwape 1978 & 1987, y para soluciones periódicas en Afuwape 1986, pero el método de reducción no-local no se utilizó allí. Más bien, los criterios generalizadas de Yacubovich de las técnicas dominio-frecuencia se utilizaron. Véase, por ejemplo Leonov et al., 1996a. Aquí, nos hemos concentrado en el método de reducción no-local que nos da la oportunidad de reducción de los sistemas de alto orden para el análisis de sistemas de segundo orden.

CAPÍTULO 3

UN NUEVO CRITERIO DISIPATIVO PARA ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Usando un nuevo criterio para disipatividad enfocado hacia las oscilaciones de Yacubovich, daremos algunas extensiones de resultado anteriores sobre disipatividad de algunas ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden. Los métodos de dominio de frecuencia se utilizan en las ecuaciones de Rayleigh y Lienard.

3.1 Introducción

Con los años, el estudio de las propiedades cualitativas de las ecuaciones diferenciales no lineales de la forma F se han relacionado con la obtención de un

$$X^{'} = F(t, X) \tag{3.1}$$

se han relacionado con la obtención de una función de Lyapunov $V = V(t, X)$ donde las propiedades están vinculadas a $F(t, X)$. Por ejemplo,[18, 40, 72], se sabe que si $V(t, X)$ es definido positivo y $\dot{V}|_{(3.1)}$ es definido negativo, se garantizan propiedades cualitativas como acotamiento, estabilidad y muchas otras propiedades para (3.1). Sin embargo, por lo general es muy difícil construir tal $V(t, X)$. En un intento de superar esta dificultad, Yacubovich [79], Kalman [48], Popov [67] y más tarde Yacubovich [78, 80], desarrollaron lo que ahora llamamos el lema Kalman-Yacubovich-Popov (KYP), (ver:[4, 5, 6, 7], [13, 15, 41, 81]), que ayudó a discutir las propiedades disipativas de los sistemas de la forma

$$X^{'} = AX - B\varphi(\sigma) + P(t, X), \quad \sigma = C^{*}X \tag{3.2}$$

con A una matriz $n \times n$ estable, B y C $n \times m$-matriz, $\varphi(\sigma) = col(\varphi_j(\sigma_j)), (j = 1, 2, \ldots, m)$, ($\varphi_j(\sigma_j)$ funciones real-valuadas), $P(t, X)$ es un término de perturbación y C^{*} es la matriz conjugada transpuesta de C.

El desarrollo viene de la consideración del sistema no-perturbado

$$X^{'} = AX - B\varphi(\sigma), \quad \sigma = C^{*}X \tag{3.3}$$

tal que

$$\underline{\varphi}_j \leq \frac{\varphi_j(\sigma_j)}{\sigma_j} \leq \bar{\varphi}_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.4}$$

es decir $\varphi_j \in M[\underline{\varphi}_j, \bar{\varphi}_j]$, con $\underline{\varphi}_j, \bar{\varphi}_j \in \mathbb{R}$.(ver [70])

La estabilidad absoluta de (3.4), es decir, la estabilidad asintótica global del equilibrio $X \equiv 0$ para toda φ, con $\varphi_j \in M[\underline{\varphi}_j, \bar{\varphi}_j]$ fue estudiada usando la función de Lyapunov especial

$$V(X) = X^* H X + \beta \int_0^{\sigma = C^* X} \varphi(\lambda) d\lambda.$$

" una forma cuadrática más integral de la función no lineal".

El lema KYP introdujo el mismo problema para la desigualdad del dominio de frecuencia

$$\frac{1}{\bar{\varphi}} + \text{Re } (1 + i\omega\beta)\chi(i\omega) > 0 \tag{3.5}$$

garantizando estabilidad absoluta para $\varphi \in M[0, \bar{\varphi}]$, aquí $\chi(s) = C^*(sI - A)^{-1} B$ es la función de transferencia.

Nuestro principal objetivo en este capítulo se centra en la aplicación del nuevo criterio para disipatividad de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden. Esto nos permitirá generalizar y ampliar su alcance a ecuaciones con dos funciones no lineales.

Definición 3.1. [40, 51] Un sistema de ecuaciones, $\dot{X} = F(t, X)$, satisfaciendo las condiciones de unicidad y continuidad con respecto a las condiciones iniciales, será llamado *disipativo* si existe una constante $\rho > 0$ tal que $\limsup_{t \to \infty} \|X(t; t_0, X_0\| < \rho$ para cada solución.

Definición 3.2. Además, este se dice que es uniformemente disipativo si existe $\rho > 0$ tal que para todo $\alpha > 0$ y $t_0 \geq 0$, existe $T(\alpha)$ tal que para todo X_0 con $\|X_0\| \leq \alpha$ tenemos $\|X(t; t_0, X_0)\| \leq \rho$ para $t \geq t_0 + T(\alpha)$.

El reciente esfuerzo de Vl. Rasvan ([70]) ha motivado nuestra forma de pensar para este nuevo trabajo.

El teorema generalizado para discutir disipatividad uniforme del sistema (3.2) es

Teorema 3.3. *Considere*

$$X^{'} = AX - B\varphi(\sigma) + P(t, X), \quad \sigma = C^* X \ . \tag{3.6}$$

Suponga para $|\alpha| \geq \lambda_0$, $0 \leq \alpha\varphi_j(\alpha) \leq \mu_o^j \alpha^2$; $-\alpha_1^j \leq \varphi_j'(\alpha) \leq \alpha_2^j$; $\mu_o^j \leq \alpha_1^j$; $|Pt, X)| \leq \rho$.

Si existen matrices diagonales $D_1 > 0, D_2, D_3 \geq 0$ *tal que*

$$\begin{aligned}\pi(\omega) \equiv\ & D_1 + Re[D_1(diag(\mu_o^j) + i\omega D_2)G(i\omega)] + \omega^2[D_3(I + Re(diag(\alpha_2^j - \alpha_1^j)G(i\omega)))] \\ & -G^*(-i\omega)D_3 diag(\alpha_1^j \alpha_2^j)G(i\omega) > 0 \qquad (3.7)\end{aligned}$$

para todo real ω; $G(i\omega) = C^*(i\omega I - A)^{-1}B$.

Además, supongamos que

$$\liminf_{|\lambda| \to \infty} D_2 |\lambda|^{-2} diag[\int_0^\lambda \varphi_j(\alpha) d\alpha - \frac{\lambda}{2}\varphi_j(\lambda)] \geq 0,$$

entonces el sistema (3.6) es uniformemente disipativo.

Observación 3.1.1. *Note que a diferencia de los resultados anteriores, que tenían sólo las condiciones del sector, estas tienen condiciones sobre las derivadas de la no linealidad* $(\varphi(\sigma))$.

Observación 3.1.2. *Observamos también que, cuando* $D_3 \equiv 0$ *en (3.7), la desigualdad se reduce a*

$$\pi(\omega) \equiv D_1 + Re[D_1(diag(\mu_o^j) + i\omega D_2)G(i\omega)] > 0 \qquad (3.8)$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

3.2 Aplicacion a la ecuación con una no–linealidad

Consideremos primero la ecuación de segundo orden con una no-linealidad, sólo para ver una aplicación del teorema 3.3. Considere

$$\ddot{x} + 2p\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x + \omega_n^2 \gamma(x) = q(t, x, \dot{x}) \qquad (3.9)$$

la cual puede ser reescrita como

$$\ddot{x} + 2p\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 \varepsilon x + \omega_n^2[(1-\varepsilon)x + \gamma(x)] = q(t, x, \dot{x})$$

o

$$\ddot{x} + 2p\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 \varepsilon x + \omega_n^2 \varphi(x) = q(t, x, \dot{x})$$

donde $\varphi(x) = (1-\varepsilon)x + \gamma(x)$.

Cuando ponemos esto en la forma de (3.2) tenemos

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2p\omega_n y - \omega_n^2 \varepsilon x - \omega_n^2 \varphi(x) + q(t, x, y) \end{cases} \qquad (3.10)$$

Así, mediante la elección

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2\varepsilon & -2p\omega_n \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{pmatrix};$$
$$P(t, X) = \begin{pmatrix} 0 \\ q(t, x, y) \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

tenemos el sistema (3.2).

Entonces la matriz de transferencia $G(s) = C^*(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{\Delta(s)}\omega_n^2$ con $\Delta(s) = (s^2 + 2p\omega_n s + \omega_n^2\varepsilon)$. Claramente, $G(0) = \varepsilon^{-1} > 0$.

Tomando $\underline{\varphi} = 0$ y eligiendo en (3.7), $D_1 = \frac{1}{\bar{\varphi}},\ D_2 = \theta,\ \ D_3 = 0$, tenemos la desigualdad dominio de frecuencia como

$$\pi(\omega) \equiv \frac{1}{\bar{\varphi}} + \frac{(\omega_n^2\varepsilon - \omega^2 - 2p\omega_n\theta)\omega_n^2}{(\omega_n^2\varepsilon - \omega^2)^2 + 4p^2\omega_n^2\omega^2} > 0$$

para todo $\omega \geq 0$.

Ahora, esto será verdadero si y solo si

$$(\omega_n^2\varepsilon - \omega^2)^2 + 4p^2\omega_n^2\omega^2 + \bar{\varphi}(\omega_n^2\varepsilon - \omega^2 - 2p\omega_n\theta)\omega_n^2 > 0, \tag{3.12}$$

Después de algunas simplificaciones, esta se reduce a

$$\omega^4 + \omega^2\{\omega_n^2[4p^2 - 2\varepsilon - \bar{\varphi}]\} + \omega_n^4[\varepsilon^2 + \bar{\varphi}\varepsilon - \beta\bar{\varphi}] > 0 \tag{3.13}$$

con $\beta = \frac{2p\theta}{\omega_n}$.

Ahora notemos que la desigualdad cuadrática $v^2 + kv + l > 0$ para todo $v \geq 0$ es verdadera si y solo si $k^2 - 4l < 0$.

Usando este hecho, tenemos que (3.13) será verdadero para todo $\omega \geq 0$, si

$$(4p^2 - 2\varepsilon - \bar{\varphi})^2 - 4(\varepsilon^2 + \bar{\varphi}\varepsilon - \beta\bar{\varphi}) < 0, \quad \text{para} \quad \bar{\varphi} > 0.$$

Esto es

$$\bar{\varphi}^2 + 4(\beta - 2p^2)\bar{\varphi} + 4(\varepsilon - 2p^2)^2 - 4\varepsilon^2 < 0.$$

De nuevo, usando la propiedad cuadrática, esto será verdadero si

$$(\beta - 2p^2)^2 - [(\varepsilon - 2p^2)^2 - \varepsilon^2] > 0, \quad \text{para} \quad \bar{\varphi} > 0.$$

Esto es

$$\beta^2 - 4p^2\beta + 4p^2\varepsilon > 0, \quad \text{para} \quad \bar{\varphi} > 0. \tag{3.14}$$

Ahora, eligiendo β entre dos raíces positivas de

$$\beta^2 - 4p^2\beta + 4p^2\varepsilon = 0$$

entonces, (3.14) será verdadero para todo $\bar{\varphi} > 0$, el cual puede ser arbitrariamente grande.

Esto entonces nos da condiciones para el sector y la pendiente.

$$\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} > -G(0)^{-1} = -\varepsilon,$$

para $|\sigma| \geq \lambda_0$.

De nuevo, esto nos dará la condiciones sobre nuestra función no lineal original, $\gamma(x)$

$$\frac{\gamma(x)}{x} > -1 - \varepsilon, \quad -1 < \gamma'(x) < -1 + \bar{\varphi}, \quad \forall |x| \geq \lambda_0. \tag{3.15}$$

Teorema 3.4. *Sujeto a las condiciones (3.15), la ecuación (3.9) es uniformemente disipativa.*

Observación 3.2.1. *Esto sólo muestra el tipo de dificultades que se presentan para una función no-lineal en la ecuación considerada.*

3.3 Aplicaciones a ecuaciones con dos no–linealidades

La principal contribución será considerar unas ecuaciones de segundo orden con dos funciones no-lineales, llamadas la ecuación Liénard

$$\ddot{y} + f(y)\dot{y} + g(y) = q(t, y, \dot{y}) \tag{3.16}$$

y la ecuación Rayleigh

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + g(x) = q(t, x, \dot{x}) \tag{3.17}$$

donde $F(z) = \int_0^z f(s)ds$.

Tenemos la siguiente definición:

Definición 3.5. Bajo el criterio dominio-frecuencia (3.7) diremos que el sistema

$$X' = AX - B\varphi(\sigma) + P(t, X), \quad \sigma = C^*X \tag{3.18}$$

tiene el sistema dual

$$X' = A^*X - C\tilde{\varphi}(\tilde{\sigma}) + \tilde{P}(t,X), \quad \tilde{\sigma} = B^*X \tag{3.19}$$

donde A^*, B^* son transpuestas conjugadas complejas de las matrices A y B y C.

Observación 3.3.1. *Las condiciones dominio frecuencia, (3.7), para el sistema dual son equivalentes. (cf.[7])*

Lema 3.6. *Bajo el criterio dominio de frecuencia la ecuación de Rayleigh (3.17) es dual a la ecuación de Liénard (3.16).*

Demostración. Sea $F(y) = 2py + \Phi(y)$, $g(x) = \nu^2 x + \gamma(x)$, $(p > 0, \nu > 0)$.

Este es claro si reescribimos (3.17) como un sistema en la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y,\\
\dot{y} &= -\nu^2 x - 2py - \gamma(x) - \Phi(y) + q(t,x,y)
\end{aligned}$$

para el cual

$$\begin{gathered}
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 & -2p \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\\
P(t,X) = \begin{pmatrix} 0 \\ q(t,x,y) \end{pmatrix}; \quad \sigma = C^*X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} \gamma(x) \\ \Phi(y) \end{pmatrix};
\end{gathered} \tag{3.20}$$

La ecuación Liénard es equivalente al sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -\nu^2 y - \gamma(y) + q(t,x,y)\\
\dot{y} &= x - 2py - \Phi(y)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

el cual en realidad es

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= \dot{x} - 2p\dot{y} - \Phi'(y)\dot{y}\\
&= -\nu^2 y - \gamma(y) - F'(y)\dot{y} + q(t,x,y)\\
&= -g(y) - f(y)\dot{y} + q(t,x,y).
\end{aligned}$$

$$\ddot{y} = \dot{x} - 2p\dot{y} - \Phi'(y)\dot{y} = -\nu^2 y - \gamma(y) - F'(y)\dot{y} + q(t,x,y)\ .$$

Así

$$\ddot{y} + f(\dot{y}) + g(y) = q(t, y, \dot{y}).$$

Por lo tanto el sistema (3.21) es dual para el sistema (3.19) con

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu^2 \\ 1 & -2p \end{pmatrix} = A^*; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C; \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B;$$
$$\tilde{P}(t, X) = \begin{pmatrix} q(t, x, y) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\sigma} = \tilde{C}^* X = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}; \tilde{\varphi}(\tilde{\sigma}) = \begin{pmatrix} \gamma(y) \\ \Phi(y) \end{pmatrix}.$$

Esto completa la prueba del lema. □

Ahora, consideremos el resultado principal de esta tesis sobre el sistema (3.19) y (3.21).

Considerar la ecuación de Rayleigh

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + g(x) = q(t, x, \dot{x})$$

o equivalentemente,

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \Phi(\dot{x}) + \nu^2 x + \gamma(x) = q(t, x, \dot{x})$$

con $F(y) = 2py + \Phi(y), g(x) = \nu^2 x + \gamma(x), \quad (p > 0,\ \nu > 0)$, tal que las no-linealidades $\Phi(z), \quad \gamma(y)$ satisfacen

$$\begin{aligned} 0 \le y\Phi(y) \le \mu_2 y^2, &\quad 0 \le x\gamma(x) \le \mu_1 x^2, \\ 0 \le \Phi'(y) \le \mu_2, &\quad 0 \le \gamma'(x) \le \mu_1 \end{aligned} \tag{3.22}$$

para $|y| \ge \lambda_o$, $|x| \ge \lambda_o$ y $|q(t, x, \dot{x})| \le \rho_o$.

Teorema 3.7. *La ecuación Rayleigh (3.17) is uniformemente disipativa si existe* $\varepsilon > 0,\ \eta > 0,\ \mu_1 > 0,$ *y* $\mu_2 > 0$ *tal que para* $|y| \ge \lambda_o$ *y* $|x| \ge \lambda_o$ *y* $|q(t, x, \dot{x})| \le \rho_o$

$$\varepsilon \le \frac{F(y)}{y} \le \mu_2, \quad \eta \le \frac{g(x)}{x} \le \mu_1.$$

En la misma línea, la ecuación Liénard es uniformemente disipativa como una DUAL de la ecuación Rayleigh.

Teorema 3.8. *La ecuación Liénard (3.16) es uniformemente disipativa si existen* $\varepsilon > 0,\ \eta > 0,\ \mu_1 > 0,$ *y* $\mu_2 > 0$ *tal que para* $|z| \ge \lambda_o$ *y* $|y| \ge \lambda_o$ *y* $|q(t, y, \dot{y})| \le \rho_o$

$$\varepsilon \le \frac{\int_0^z f(s)ds}{z} \le \mu_2, \quad \eta \le \frac{g(y)}{y} \le \mu_1.$$

Demostración del Teorema 3.7

Primero, notemos que, con la elección de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 & -2p \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$P(t,X) = \begin{pmatrix} 0 \\ q(t,x,y) \end{pmatrix}; \quad \sigma = C^*X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} \gamma(x) \\ \Phi(y) \end{pmatrix};$$

tenemos

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ \nu^2 & s+2p \end{pmatrix}; det(sI - A) = s^2 + 2ps + \nu^2;$$

Por lo tanto A es estable.

Si denotamos $\Delta(i\omega) = det(i\omega I - A) = \nu^2 - \omega^2 + 2pi\omega$, entonces,

$$(iwI - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta(i\omega)} \begin{pmatrix} 2p + i\omega & 1 \\ -\nu^2 & i\omega \end{pmatrix};$$

y la matriz de transferencia es

$$G(i\omega) = C^*(i\omega I - A)^{-1}B = \frac{1}{\Delta(i\omega)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & i\omega \end{pmatrix}.$$

Si elegimos $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0, D_1 = diag(\tau_1, \tau_2), D_2 = diag(\lambda_1, \lambda_2)$ and $D_3 = 0$, la desigualdad dominio de frecuencia (3.7) se convierte en

$$\pi(\omega) \equiv \begin{pmatrix} 2\tau_1 + 2Re[\frac{\tau_1\mu_1 + i\omega\lambda_1}{\Delta(i\omega)}] & [\frac{\tau_1\mu_1 + i\omega\lambda_1}{\Delta(i\omega)} - \frac{\lambda_2\omega^2 + i\omega\tau_2\mu_2}{\Delta(i\omega)}] \\ \frac{\tau_1\mu_1 - i\omega\lambda_1}{\Delta(i\omega)} + \frac{-\lambda_2\omega^2 + i\omega\tau_2\mu_2}{\Delta(i\omega)} & 2\tau_2 + 2Re[\frac{-\lambda_2\omega^2 + i\omega\tau_2\mu_2}{\Delta(i\omega)}] \end{pmatrix} > 0 \qquad (3.23)$$

Después de algunos cálculos, esto se convierte

$$\pi(\omega) \equiv \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} \qquad (3.24)$$

$$> 0 \qquad (3.25)$$

donde

$$\pi_{11} = 2\tau_1 + \frac{2}{|\Delta|^2}[\mu_1\tau_1(\nu^2 - \omega^2) + 2p\omega^2\lambda_1],$$

$$\begin{aligned}\pi_{12} &= \frac{2}{|\Delta|^2}\{[(\nu^2-\omega^2)(\mu_1\tau_1-\omega^2\lambda_1)+2p\omega^2(\lambda_1+\mu_2\tau_2)]\\ &\qquad -2pi\omega(\mu_1\tau_1+\omega^2\lambda_2)\}\\ &= \bar{\tau}_{21},\\ \pi_{22} &= 2\tau_2+\frac{2\omega^2}{|\Delta|^2}[2p\mu_2\tau_2-\lambda_2(\nu^2-\omega^2)],\end{aligned}$$

con $|\Delta|^2=\Delta(i\omega)\Delta(-\omega)=(\nu^2-\omega^2)^2+4p^2\omega^2$.

Haciendo $\lambda_2=0, \gamma_1=\frac{\tau_1\mu_1}{\tau_2\mu_2}, \gamma_2=\frac{\lambda_1}{\tau_1}$, la condición dominio de frecuencia se verifica usando el criterio de Sylvester sobre la positividad del determinante de los menores principales de $\pi(\omega)$.

Por lo tanto, para que esto sea verdadero, es suficiente tener el determinante de $\pi(\omega)>0$.

Esto simplica a tener

$$\begin{aligned}&\omega^2+\frac{1}{\omega^2}(\nu^4+\mu_1\nu^2-\frac{\gamma_1\mu_1\mu_2}{4})\\ &>2\nu^2-2p(2p+\mu_2)+\mu_1-(2p+\frac{\mu_2}{2})\gamma_2+\frac{\mu_1\mu_2}{4\gamma_1}+\frac{\gamma_2^2}{4}.\frac{\gamma_1\mu_2}{\mu_1}\end{aligned} \tag{3.26}$$

Note que la función $H(v)=v+\frac{k}{v}$ para valores postivos de v alcanza un mínimo en $v_1=\sqrt{k}$. Además, este tiene su valor mínimo cuando $H_{min}(v_1)=2\sqrt{k}$.

Usando este hecho, tenemos que el mínimo del lado izquierdo de la desigualdad (3.26) para $\omega\in\mathbb{R}$ es

$$\sqrt{4\nu^2(\nu^2+\mu_1)-\mu_1\mu_2\gamma_1},$$

donde $0<\gamma_1<4\nu^2(\nu^2+\mu_1)(\mu_1\mu_2)^{-1}$.

Por lo tanto las condiciones requeridas son obtenidas.

Sea,

$$C(\mu_1,\mu_2,\gamma_1)=\sqrt{4\nu^2(\nu^2+\mu_1)-\mu_1\mu_2\gamma_1}+2p(2p+\mu_2)-2\nu^2-\frac{\mu_1\mu_2}{4\gamma_1}-\mu_1$$

las condiciones dominio de frecuencia serán verdaderas si tenemos γ_1 y γ_2 tal que

$$(\frac{\gamma_1\mu_2}{4\mu_1})\gamma_2^2-(2p+\frac{\mu_2}{2})\gamma_2-C(\mu_1,\mu_2,\gamma_1)<0.$$

Esto es posible si

$$(2p+\frac{\mu_2}{2})^2+(\frac{\gamma_1\mu_2}{\mu_1})C(\mu_1,\mu_2,\gamma_1)<0.$$

Usando la expresión para $C(\mu_1, \mu_2, \gamma_1)$, como

$$\frac{\gamma_1\mu_2}{\mu_1}C(\mu_1, \mu_2, \gamma_1) = -(\frac{\mu_2^2}{4} + O(\gamma_1))$$

entonces tenemos (3.26) la cual será verdadera para valores pequeños de p.

Esto concluye la prueba el Teorema 3.7, usando el teorema 3.3.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Aizerman M.A. On one problem concerning global stability of dynamical systems. *Uspekhi Mat. Nauk, 4(4):187-188, 1949.*

[2] Aizerman M.A., and Gantmakher F.R. Absolute stability of regulator system. Holden–Day, San Francisco, 1964.

[3] Afuwape,A.U., *J. Math. Anal. Appl.*, 317 (2006) 613–619.

[4] A.U. Afuwape, Frequency - domain criteria for dissipativity of some third-order differential equations, *Ann. stiint. Univ. Ál. I. Cuza'*, xxiv (1978), 271–275. MR.80m:34045.

[5] A.U. Afuwape, An application of the frequency domain criteria for dissipativity of a certain third-order nonlinear differential equation , *Analysis 1(1981) 211-216. MR.83g: 34032.*

[6] A.U. Afuwape, Uniform dissipative solutions for a certain class of third-order nonlinear differential equations, in *Differential Equations (Edited by I. W. Knowles and R.T. Lewis), pp. 1 - 6, Elsevier Science Publishers, North-Holland (1984).* MR.0799326.

[7] A.U. Afuwape, On the applications of the frequency- domain method to uniformly dissipative nonlinear systems, *Mathematische Nachrichten, 130 (1987), 217- 224. MR. 88a: 34047.*

[8] Afuwape, A.U. and Castellanos, J.E., Existence of Periodic Solutions of a nonlinear third order differential equation using the nonlocal reduction method, *J. Nig. Math. Soc. Vol.26 (2007), 75 - 80.*

[9] Afuwape, A.U. and Castellanos J.E., Asymptotic and Exponential Stability Certain Third-Order Non-Linear Delayed Differential Equations: Frequency Domain Method - *Applied Mathematics and Computations vol. 216 (2010) 940 -950 - online since 4th February 2010 , Elsevier publishers.*

[10] Afuwape, A.U. and Castellanos J.E., Dichotomy of Pendulum-Like systems of the third-order nonlinear differential equations., *Proceedings of Dynamic Systems and Applications. 6:1-5(2012)*

[11] Afuwape, A.U., Castellanos, J.E., and Torres, J.J., An application of the new dissipative criterion for second order nonlinear differential equations, *J. Nig. Math. Soc. Vol.32 (2013), 207-216.*

[12] Amerio L. Determinazione delle condizioni di stabilita per gli integrali di unéquazione interessante lélecttronica, *Annali di Matematica pura ed applicata (30) (1949)*

[13] I. Barbălat, Conditions pour un bon comportment de certaines equations differentielles du troisieme et du quatrieme ordre, in *."Equations differentielles et fonctionnelles non-lineaires"(eds. P. Janssens, J. Mawhin and N. Rouche), Hermann, Paris (1973) 80-91.*

[14] I. Barbălat and A. Halanay, Applications of the frequency- domain method to forced non-linear oscillations, *Math. Nachr (44) (1970) 165-179.*

[15] I. Barbălat and A. Halanay, Nouvelles applications de la methode frequentielle dans la theorie des oscillations, *Rev. Roum. Sci. Techn. Electrotechn. Energ. 16, (1971) 689-702 .*

[16] I. Barbălat and A. Halanay, Conditions de comportement "presque lineaire"dans la theorie des oscillations, *Rev. Roum. Sci. Techn. Electrotechn. Energ. 29, (1974) 321 - 341 .*

[17] Barabanov N.E. On the Kalman conjeture. Sibirsk. at. Zh., 29(3):3-11, 1988.

[18] E. A. Barbashin,*I*ntroduction to the Theory of Stability, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1970, MR. 4 8737.

[19] Bautin N.N. Qualitative investigation of an equation of a PLL., *Prikl. Matem. i Mekh, 34(5):850-860, 1970.*

[20] Belych V.N., and Nekorkin V.I. The qualitative investigation of a system of three differential equations from the phase synchronization theory. Prikl Matem. 39(4):642-649,1975.

[21] Belych V.N., and Nekorkin V.I. On qualitative investigation of multidimensional phase system. Sibirk. mat. Zh. 18(4):511-520,1977.

[22] Belyustina L.N. On an equation in the theory of electrical machines. *In the memory of A.A. Andronov, pages 173-186. Izdat. Acad. Nauk SSSr, Mooscow, 1955.*

[23] Belyustina L.N. Investigation of a nonlinear system of PLL. Izvest. Vish. Uchebn. Zaved., Radiofizika, 2(2), 1959.

[24] Belyustina L.N., and Belych V.N. A qualitive investigation of the dynamical system on the cylinder. Differentsialńye Uravneniya 9(3):403-415, 1973.

[25] Böhm C. Nuori criteri di esistenza di soluzione periodiche di una nota equazione differenziale non lineare. *Annali di Matematica pura ed applicata 35 (4): 343-353, 1953*.

[26] Brockett R.W. Finite Dimensional Linear Systems. Wiley, N.Y., 1970.

[27] Caughey T.K. Hula-hoop: an example of heteroparametric exitation. am.J.Phys., 28(2),1960.

[28] Chua L.O., Dynamic nonlinear nrtworks: state of art. *IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-31:1059-1087,1980*

[29] Chua L.O., A zoo of strange attractors from the canonical Chua's circuits. College of engineering University of Berkely, CA 94720, 26 August 1992.

[30] Chua L.O., Komuro M., and Matsumoto T. The double scroll family. Part I and II. IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-33:1072-1118, 1986

[31] Chua L.O., and Green D.N., A qualitive analysis of the behavior of dynamic nonlinear nrtwork stability of autonomous nrtwork. *IEEE Trans. on Circuits and Systems, 23(6):355–379,1976*

[32] Chua L.O., and Lin P.M. Computer added analysis of electronic circuits: algorithms and computational techniques. Prentice-Hall, NY., 1975.

[33] Chua L.O., and Lin P.M. Canonical realization of Chua's circuit family. *IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-37:885–902,1990*

[34] Chua L.O., and Kang S.M. Section–wise, piece–wise–linear functions; canonical representation, properties and applications. *Proc. IEEE, 65: 915-929, June 1977*

[35] Demidovich B.P. Lectures in mathematical theory of stability, Nauka, Moscow, 1967.

[36] Duan, Zhiheng; Wang, Jinzhi; and Huang, Lin *Automatica 43 (2007) 1583-1589.*

[37] Gantmakher F.R. The theory of matrices. Nauka, Moscow, 1988.

[38] Gelig A.Kh., Leonov G.A., and Yakubovich V.A. The Stability of nonlinear system with nonunique equilibrium state. Nauka, Moscow, 1978.

[39] Giger A. Ein Grenzproblem einer technisch wichtiqen nithtlinearen Differentialgleichung. Z.A.M. ph., 7:121-129, 1956.

[40] W.A. Haddad and V.S. Chellaboina, *Nonlinear Dynamical Systems and Control - A Lyapunov-Based Approach,* Princeton University Press, Princeton and Oxford (2008).

[41] A. Halanay, Frequency-domain criteria for dissipativity, in *Ordinary Differential Equations (Edited by L. Weiss), pp. 413 - 416, Academic Press, New York (1972).*

[42] Hale G.K. Some examples of infinite dimensional dynamical systems. *Contemporary Math., 58, Part 3, 1987*

[43] Hartman P. Ordinary differential equations. John Wiley, N.Y.-London-Sydney, 1964.

[44] Hayes W.D. On the equation for a damped pendulum under constant torque. Z.A.M. Ph., 4(5), 1953.

[45] Hirsch M.W. Stability and convergence in strongly monotone dynamical system. *J. reine angew. Math., 383:1-53,1988*

[46] Kahler C., and Chua L.O. Tranfer maps and maps for piece-wise linear, three-region dynamical system. *Int. J. circuit Theory Appl., 14, 1986*

[47] Kalman R.E. Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems. *Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., 79 (3) 553-563, 1957*

[48] R.E. Kalman, *Lyapunov functions for the problem of Lurie in automatic control,* Proc. National Acad. Sci. U.S.A. 49 (1963) 201 - 205.

[49] , Kalman R.E., Falb P.L., and Arlib M.A., Stability problems Mir, Moscow, 1971.

[50] Levhetz S. Stability of nonlinear control systems. Academic Press, New York, 1965.

[51] G.A. Leonov, I.M. Burkin and A.I. Shepeljavyi, *Frequency Methods im Oscillation Theory,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands (1996). MR.96j:34001.

[52] Leonov,G.A. *On the boundedness of trajectories of phase systems*, Sibirsk Mat. Zh., 15(3):687-692, 1974.

[53] Leonov,G.A., Burkin, I.M. and Shepeljavyi,A.I., *Frequency Methods im Oscillation Theory,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands (1996). MR.96j:34001.

[54] G.A. Leonov, and Churilov A.N. *Frequency conditions of the boundedness of solutions of phase systems. In Dinanical system, 10, 3-20. 1976.*

[55] G.A. Leonov, and Churilov A.N. *a Frequency-domain criterion of stability of dynamical systems with angular coordinates, 1982.*

[56] Leonov, G.A., Ponomarenko, D.V. and Smirnova, V.B. *Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis, Theory and Applications.* World Scientific Publ. Co. (1996).

[57] Matsumoto T., Chua L.O., A chaotic attractor from Chua's circuit. *IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-31(12):1055-1058,1984*

[58] Matsumoto T., Chua L.O., and Komuro M. The double scroll. *IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-32(8):797-818,1985*

[59] Matsumoto T. Chua L.O., Komuro M. The double scroll bifurcations. *Int. J. Circuit Theory Appl., 14:117-146, 1986*

[Mitropol'skij 1971] itropol'skij Yu. A. The method of averaging in nonlinear mechanics. *Naukova Dumba, Kiev*, 1971.

[60] Morary A. Nonlinear oscillations of synchronous machines started wich a pulsating rotating torque. *In Trudy mezhd. konf. po nelin. koleb.*, number 4, kiev, 1970.

[61] Noldus E.J. New direct Lyapunov-type method for stadying synchronization problems. *Automatika*, 13(2):139-151, 1977.

[62] P. Omari and M. Trombetta, Remarks on the lower and upper Solutions for Second - and Third - Order Periodic Boundary Value Problems, *Applied Math. Computation, 50 (1992), 1 - 21.* MR. 93d:34040

[63] Ogorzalek M.J., Chaotic regions from double scroll. *IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-34(8):201-203,1987*

[64] Ogorzalek M.J., Order and chaos in third-order RC–ladder nrtwork with nonlinear feedbach. *IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-36:1221-1230,1989*

[65] Panovko Yu.G., and Gubanova I.I. Stability and oscilations in solid systems. Nauka, Moscow, 1979.

[66] Parker Th.S., and Chua L.O. The dual double scroll equation. *IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-34(8):1050-1073,1987*

[67] V.M. Popov, The solution of a new stability problem for controlled systems, *Automat. Remote Control 24, (1963) 1-23.*

[68] Popov V.M. Hiperstabilitatea sistemelor automate. Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, 1966.

[69] Rabinder N. madan, editor. Chua's circuit: a paradigm for chaos, volume 1 of world Scientific Series on Non-linear Science, Series B. World Scientific, Sigapore etc., 1993.

[70] Vl. Rasvan, A new dissipativity criterion - Towards Yakubovich oscillations, *Int. J. Robust Nonlinear Control, 17 (2007) 483-495.*

[71] L.L. Rauch, Oscillations of a third order nonlinear autonomous system, in Çontributions to the Theory of Nonlinear Oscillations", *Ann. Math. Studies* **20** (1950), 39-88.

[72] R. Reissig, G. Sansone and R. Conti, : *Nonlinear Differential Equations of Higher Order.* Noordhoff Pub., Groningen. (1974). MR.49#9295

[73] Tricomi F. Integrazione di unequazione differenziale presentasi in electrotechnica. *Annali della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa: Scienza Phys. e Mat.,2:1–20,1933*

[74] Voronov A.A. Stability, Controllability, Observability. Mir, Moscow, 1979.

[75] Voronov A.A. Foundations of Automatic Control Theory. Particular Linear and Nonlinear System. Energoizdat, Moscow, 1981.

[76] Wang, Jinzhi; Duan, Zhisheng; Huang, Lin; *System and Control Letters 56 (2007) 167-172.*

[77] Wang, Jinzhi; Huang, Lin; Duan, Zhisheng; *Automatica 40 (2004) 1011 -1016*

[78] V.A. Yacubovich, *The matrix method in the theory of the stability of non linear control systems,* Aut. Rem. Control 25 (1964) 905 - 916.

[79] V.A. Yacubovich, The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory, Soviet Math. Dokl. 3,(1962) 620-623.

[80] V.A. Yacubovich, Frequency-domain conditions for absolute stability and dissipativity of control systems with one differentiable non-linearity, *Soviet Math. Dokl. (6) (1965) 98-101.*

[81] V.A. Yacubovich,G.A. Leonov, - A. Kh. Gelig, *Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities,* World Scientific Publishers, (2004).

[82] Zhong G.O., and Ayron F. Experimental confirmation of chaos from Chua's circuit. *Int. J. Circuit Theory Appl., 13(1):93-98, Jan 1985*

Belych & Nekorkin 1975, Viterbi 1966